

73  
63  
*Annales de la  
SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE  
de Bruxelles*

*Association sans but lucratif*

TOME SOIXANTE-TREIZIÈME

SÉRIE I

SCIENCES MATHÉMATIQUES  
ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES

TROISIÈME ET DERNIER FASCICULE

21 décembre 1959



*Publié avec le concours de la Fondation universitaire de Belgique  
et du Gouvernement*

SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE  
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11  
LOUVAIN

1959

Publication trimestrielle. Prix de ce fascicule séparé: 70 frs

## AVIS

Les périodiques internationaux de références et de bibliographie sont autorisés à reproduire, moyennant une référence, les résumés que les auteurs placent en tête de leurs travaux dans ces *Annales*.

## TABLE DES MATIÈRES

---

Session du 29 octobre 1959, à Louvain .....	295	
PREMIÈRE SECTION : SCIENCES MATHÉMATIQUES		
ET ASTRONOMIQUES .....	295	
Valeurs exceptionnelles des fonctions continues et uniformes. Fondements du théorème de Picard, par C. de LA VALLÉE POUSSIN .....	295	
Eutropie demosienne de multigroupeïdes et de quasigroupes, par A. SADE ..	302	
DEUXIÈME SECTION : SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES .....		310
On the statistical laws of linguistic distributions, by V. BELEVITCH .....	310	
L'énergie potentielle complémentaire dans les problèmes dynamiques. — Un principe de variation des accélérations, par B. FRAEYS de VEUBEKE ..	327	
La lentille épaisse convergente. I. Représentation graphique et chroma- tisme des longueurs focales, par A. BIOT .....	345	
II. Achromatisme du point image sur l'axe, par A. BIOT .....	354	
L'épaisseur équivalente d'une lentille absorbante, par A. BIOT .....	363	
Etude et première réalisation d'un stroboscope à déphasage variable, utilisant la modulation de lumière par les ultra-sons, par N. SEGARD, J. POULIQUEN et B. TRENTESAUX .....	373	
Description d'un cryomètre à thermistance et cryométrie par fusion finissante, par P. HUYSKENS, P. CLAES et J. L. GAILLIEZ .....	383	
L'influence de la température sur les photomultiplicateurs, par M. LONTIE- BAILLIEZ et A. MEESEN .....	390	
Table des solubilités des sels usuels à l'usage du chimiste praticien, par R. DELHEZ .....	403	
Analyseur magnétique pour deutérons de 12 Mev, par A. GONZE .....	414	
Polarimètre conique pour rayons gamma; mesures de corrélation « bêta- gamma polarisé circulairement » de $Au^{198}$ , par J. P. DEUTSCH et P. LIPNIK .....	420	
Coefficients de température du facteur de séparation électrolytique de l'eau lourde, remarque de J. OOSTENS .....	431	
Table des matières du tome 73 .....	432	

---

Le prix d'ABONNEMENT aux ANNALES, série I, pour des personnes  
ne faisant pas partie de la Société scientifique, est fixé comme suit :

*en Belgique, au Congo-Belge et au Luxembourg* 100 F  
*dans les autres pays* 150 F

SESSION DU 29 OCTOBRE 1959

à Louvain

Première Section

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Valeurs exceptionnelles des fonctions continues  
et uniformes.

Fondements du théorème de Picard

PAR

C. DE LA VALLÉE POUSSIN

§ 1. Considérations générales

1. SITUATION DE THÉORÈME DE PICARD. — Ce théorème n'est pas isolé. C'est le cas le plus simple d'un théorème général qui, sous certaines conditions de *normalité*, s'applique à toutes les fonctions continues et uniformes, qu'elles soient analytiques ou non; et dont voici l'énoncé :

*L'ensemble E des valeurs exceptionnelles d'une fonction continue et uniforme,  $u = f(z)$ , de la variable  $z = x + yi$ , supposée normale, se compose au plus de deux sous-ensembles connexes E' et E" pouvant chacun se réduire à un point.*

Ce théorème est la conséquence de l'uniformité. La démonstration en est directe, topologique et immédiatement apparente. Pour en déduire le théorème de Picard, il reste à démontrer que, si la fonction  $u$  est analytique, l'ensemble E de ses valeurs exceptionnelles exclut tout continu. Cette exclusion s'appuie sur un

théorème rudimentaire de la théorie des fonctions analytiques, dont c'est la seule intervention.

## § 2. Fonction normale et valeurs exceptionnelles

2. DÉFINITION DE LA FONCTION. — Une fonction  $u = f(z)$  de  $z = x + yi$  est définie dans tout le plan  $(z)$  par l'expression

$$u = X(x, y) + iY(x, y).$$

Elle est soumise aux conditions suivantes.

Les fonctions réelles  $X$  et  $Y$  sont continues et uniformes, elles admettent des dérivées partielles continues. La fonction  $u$  peut devenir infinie en des points  $z$  isolés pourvu que son inverse  $1/u$  reste continue. Sous ces conditions, la fonction  $u$  de la variable complexe  $z = x + yi$  est continue et uniforme et nous disons qu'elle est *normale* si l'ensemble des valeurs accessibles est ouvert.

3. VALEURS EXCEPTIONNELLES. — Est *exceptionnelle* une valeur non atteinte par  $u$  dans le plan  $(z)$  fini. Le point  $u$  correspondant est un *point exceptionnel*. Les autres points sont *accessibles* ou *ordinaires*.

Si un point  $u_0$  est atteint pour  $z = z_0$ , son entourage contient les points qui correspondent à ceux de l'entourage de  $z_0$ .

Nous désignerons par  $E$  l'ensemble des valeurs exceptionnelles, et par  $CE$  son complémentaire qui est celui des valeurs accessibles.

*L'ensemble CE est connexe.* En effet, supposons que  $CE$  comprenne deux compartiments séparés  $\Omega'$  et  $\Omega''$ . Prenons un point  $u'$  dans  $\Omega'$  et un autre  $u''$  dans  $\Omega''$ . Ou bien  $u'$  et  $u''$  ont un même correspondant  $z'$  et  $u$  n'est pas uniforme; ou bien ils ont des correspondants différents  $z'$  et  $z''$  alors  $u$  est discontinue sur toute ligne joignant  $z'$  à  $z''$ .

## § 3. Deux théorèmes fondamentaux

4. THÉORÈME PRÉLIMINAIRE. — Soit  $u = f(z)$  une fonction normale,  $E$  l'ensemble de ses valeurs exceptionnelles. Si un contour fermé simple  $\gamma$  du plan  $(u)$  correspond à une ligne ouverte  $\Gamma$  du plan  $(z)$ , la portion  $E'$  de  $E$  contenue dans  $\gamma$  est connexe ou se réduit à un point.

Soit  $a$  le point de  $\gamma$  qui correspond aux extrémités  $A$  et  $A'$  de la ligne ouverte  $\Gamma$ . Quand  $z$  décrit  $AA'$ ,  $u$  décrit de  $a$  en  $a$  un tour simple sur  $\gamma$ .

Dans le plan  $(z)$ , joignons  $A$  à  $A'$  par une seconde ligne simple  $L$  menée du côté de  $\Gamma$  qui correspond à l'intérieur de  $\gamma$ . Si la ligne  $L$  longe  $\Gamma$  d'assez près, sa correspondante  $l$  intérieure à  $\gamma$  longe  $\gamma$ . Au domaine  $\Omega$  entre  $L$  et  $\Gamma$  correspond le domaine  $\omega$  entre  $l$  et  $\gamma$ . L'intérieur de  $l$  correspond à l'extérieur de  $\Omega$ .

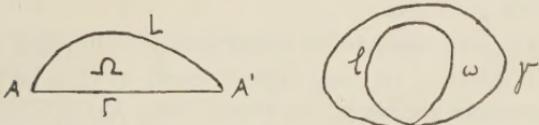


Fig. 1

Elargissons maintenant le domaine  $\Omega$  par un recul progressif de sa frontière  $L$  dans le plan  $(z)$ . Au fur et à mesure que de nouveaux points  $z$  pénètrent dans  $\Omega$ , leurs correspondants  $u$  passent dans  $\omega$  et sont exclus de l'intérieur de contour  $l$ . Donc s'il existe des valeurs exceptionnelles non liées par un continu et que l'on donne à la ligne  $L$  une position  $L'$  suffisamment écartée, ces valeurs seront séparées l'une de l'autre. Le domaine qui correspond dans l'intérieur de  $l$  ou domaine extérieur à  $L'$  se partagera en compartiments séparés, contenant des valeurs exceptionnelles différentes et bornés par des contours fermés  $\lambda'$ ,  $\lambda''$ , ... dont les points correspondent à des points de  $L$ .

Cette conclusion est exclue, car elle est en contradiction avec l'uniformité de la fonction. Tout point  $z_0$  situé au delà de la ligne  $L'$  aurait un représentant dans chacun des contours  $\lambda$ . Celui dans  $\lambda'$  se déterminerait en joignant  $z_0$  à un point de  $L'$  correspondant à un point de  $\lambda'$  et en menant la ligne correspondante dans  $\lambda'$ .

5. THÉORÈME GÉNÉRAL. — Soit  $u = f(z)$  une fonction normale, l'ensemble  $E$  de ses valeurs exceptionnelles se compose au plus de deux sous-ensembles connexes  $E'$  et  $E''$ , éventuellement réductibles chacun à un point.

Soient  $P$  et  $p$  deux points des plans  $(z)$  et  $(u)$  qui se correspondent ainsi que leurs voisinages. Soit  $\Gamma$  une circonférence de centre  $P$  et de rayon assez petit pour que le contour correspondant  $\gamma'$  autour de  $p$  soit simple. Faisons dans le plan  $(u)$  une inversion de centre  $p$ . Elle remplace le contour précédent  $\gamma'$  par un contour

simple  $\gamma$  dont l'intérieur correspond à l'extérieur de  $\Gamma$  et contient toutes les valeurs exceptionnelles. Faisons croître indéfiniment le rayon de  $\Gamma$ . Tous les points du plan ( $z$ ) pénètrent successivement à l'intérieur de  $\Gamma$  tandis que leurs correspondants sont exclus de  $\gamma$ . Donc  $\gamma$  se contracte et se resserre à la limite sur les seules valeurs exceptionnelles.

1<sup>o</sup> Si le contour  $\gamma$  reste simple, il se resserre sur un point ou sur un ensemble connexe.

2<sup>o</sup> Si la fonction admet des valeurs exceptionnelles non liées entre elles, le contour  $\gamma$  ne peut rester simple et doit se partager. Ceci exige le passage simultané de  $\Gamma$  par deux représentants différents  $A$  et  $A'$  d'un même point  $a$  du plan ( $u$ ).

Le rayon de  $\Gamma$  augmentant, arrêtons-nous au premier passage de  $\Gamma$  par deux points homologues  $A$  et  $A'$ . Si  $\Gamma$  passait en même temps par deux autres points homologues  $B$  et  $B'$ , on écarterait cette éventualité, en retardant la rencontre de  $B$  par une déformation aussi petite que l'on voudra de l'arc de  $\Gamma$  qui s'approche de  $B$ . Dès lors, la correspondance est biuniforme entre chacun des deux arcs  $AA'$  de  $\Gamma$  et leurs correspondants sur  $\gamma$ .

La circonférence  $\Gamma$  est alors partagée en deux branches  $AA'$  dont les extrémités correspondent au même point  $a$  de  $\gamma$ . Ces branches correspondent respectivement à deux boucles de sommet commun  $a$ , entre lesquelles se partage  $\gamma$ , et qui contiennent toutes les valeurs exceptionnelles.

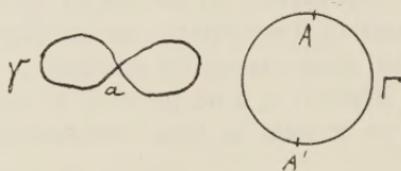


Fig. 2

La théorème est apparent.

Chacune des deux boucles correspond à une ligne simple  $AA'$ . En vertu du théorème préliminaire, elles ne peuvent contenir chacune qu'un ensemble connexe de valeurs exceptionnelles ou un point.

## § 4. Fonctions analytiques — Exclusion du continu — Théorème de Picard

6. THÉORÈME DE PICARD. — Le théorème précédent prend sa forme la plus précise et la plus simple quand les ensembles connexes se réduisent à un point. C'est le cas du théorème de Picard, dont voici l'énoncé :

*Une fonction analytique et uniforme admet au plus deux valeurs exceptionnelles, l'une pouvant être  $\infty$ .*

Une fonction analytique est normale. Pour prouver le théorème, il suffit d'établir que l'ensemble  $E$  de ses valeurs exceptionnelles exclut tout continu.

Il y a deux sortes de continu à traiter séparément : le continu superficiel qui contient des points intérieurs, le continu linéaire qui les exclut.

7. CONTINU SUPERFICIEL. — Ce continu est immédiatement exclu par un théorème élémentaire de la théorie des intégrales définies stipulant qu'une fonction bornée se réduit à une constante.

Soit  $E$  un ensemble superficiel de valeurs exceptionnelles. Une inversion par rapport à un point intérieur le rejette dans le domaine de l'infini avec une frontière à distance bornée. Celle-ci borne les valeurs de la fonction, ainsi réduite à une constante.

8. CONTINU LINÉAIRE. — Son exclusion est le seul point délicat de la démonstration du théorème de Picard, le seul qui exige une transformation non linéaire.

Soit  $\lambda$  une ligne simple de valeurs exceptionnelles. Considérons d'abord le cas où  $\lambda$  infinie dans les deux sens partage le plan en deux parties. Si  $u$  part de la valeur initiale  $u_0$  dans l'une d'elles,  $u$  ne peut en sortir quand  $z$  varie. L'autre partie est une aire exceptionnelle. C'est le cas précédent.

Si  $\lambda$  ne partage pas le plan et que ses deux extrémités soient à distance bornée, on rejette l'une d'elles à l'infini par une inversion. La nouvelle ligne  $\lambda$  n'a plus qu'une seule extrémité  $\alpha$  à distance finie. C'est le dernier cas à considérer et celui-ci exige une transformation irrationnelle.

Prenons l'extrémité  $\alpha$  comme origine des coordonnées et remplaçons la fonction  $u$ , par  $\sqrt{u}$ . A une valeur exceptionnelle  $\varepsilon$  de  $u$  en correspondent deux  $\pm \sqrt{\varepsilon}$  de  $\sqrt{u}$ . Pour la fonction  $\sqrt{u}$ ,

la ligne  $\lambda$  est donc remplacée par une ligne  $\lambda'$  formée de deux branches infinies, symétriques par rapport à l'origine et divisant le plan en deux parties. La fonction  $\sqrt{u}$ , enfermée dans chacune d'elles, y est uniforme. En effet, le seul point de ramification  $u = 0$  est situé sur la ligne  $\lambda'$  et ne peut être contourné. On est ramené au cas précédent, la fonction  $\sqrt{u}$  enfermée dans l'une ou dans l'autre des deux parties se réduit à une constante, donc  $u$  aussi.

Le théorème de Picard est démontré. Le voici :

*Une fonction analytique et uniforme admet au plus deux valeurs exceptionnelles. Si la fonction est holomorphe, l'une des deux est  $\infty$ .* Le théorème de Picard comporte deux précisions : le nombre *deux* des objets, la réduction de l'objet à *un point*. La première précision est une conséquence de l'uniformité et la démonstration en est purement topologique ; la seconde précision est de source analytique.

9. GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE PICARD. — Une fonction analytique  $F(x + yi)$  est une fonction telle que ses dérivées par rapport à la variable  $z = x + yi$  soient, en chaque point, les mêmes dans le sens de l'axe réel ( $dz = dx$ ) et dans le sens de l'axe imaginaire ( $dz = idy$ ). Ceci exige l'identité en  $x, y$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Remplaçons  $x$  par  $kx$  où  $k$  est un coefficient constant positif ou négatif. La fonction devient  $F(kx + yi)$ . La même substitution n'altère pas la relation précédente, qui s'applique alors à un autre point. Mais les dérivées de la nouvelle fonction dans les deux sens considérés deviennent respectivement

$$k \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{1}{i} \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Elles sont dans le rapport  $k$  en vertu de la relation précédente. La fonction  $F(kx + yi)$  n'est plus analytique, mais elle admet exactement les mêmes valeurs que la fonction analytique  $F(x + yi)$ , donc aussi les mêmes valeurs exceptionnelles et satisfait au théorème de Picard.

La transformation peut se faire en sens inverse. De là, le théorème suivant qui généralise celui de Picard, auquel il revient pour  $k = \pm 1$ .

*Une fonction  $F(x + yi)$  dont les dérivées dans le sens de l'axe*

réel et dans celui de l'axe imaginaire sont dans un rapport positif ou négatif constant  $k$ , vérifie le théorème de Picard.

## § 5. Conclusion

Le théorème de Picard est à divers titres l'un des plus intéressants de la théorie des fonctions analytiques. Dans la démonstration célèbre de Picard, la fonction modulaire intervenait à elle seule avec une efficacité immédiate et si tranchante que cela semblait tenir de la magie et répandait sur la question un jour un peu mystérieux. L'impression produite par le théorème s'en est ressentie et a mis le théorème sur un piédestal.

Le théorème de Picard reconnaît un privilège aux fonctions analytiques, mais n'en est pas un caractère spécifique, ainsi que le prouvent les fonctions définies au paragraphe précédent. Toutefois ces fonctions sont si voisines des fonctions analytiques qu'on peut les dire *quasi-analytiques*. Peut-on assigner les conditions les plus générales entraînant le théorème de Picard ? Si elle n'est pas adéquate, voici une réponse qui atteint déjà le fond du problème : *Une fonction qui admet deux valeurs exceptionnelles isolées satisfait au théorème de Picard, car elle ne peut plus en avoir d'autres.* Mais d'aucuns trouveront sans doute que cette réponse fait reculer la question sans la résoudre.

## Entropie demosienne de multigroupeïdes et de quasigroupes

PAR

Alb. SADE (Marseille)

On se propose d'établir un théorème très général, qui donne la solution d'une vaste catégorie d'équations demosienennes, et d'en faire l'application à l'associativité

$$(1) \quad (x\varphi_1y)\varphi_2z = x\varphi_3(y\varphi_4z)$$

et à l'*entropie* ([3], p. 444)

$$(2) \quad (x\varphi_1y)\varphi_2(z\varphi_3t) = (x\varphi_4z)\varphi_5(y\varphi_6t).$$

DÉFINITIONS. On conserve les notations de [6] et on ne considérera que des égalités *équilibrées*, comme par exemple

$$(3) \quad [(x\varphi_1y)\varphi_2(z)]\varphi_3(t\varphi_4u) = [x\varphi_5(z\varphi_6y)]\varphi_7(u\varphi_8t),$$

telles que tout élément  $x \in E$ , apparaissant dans un membre figure aussi dans l'autre une et une seule fois. Les  $\varphi_i$  étant les signes opératoires de lois de multigroupeïdes quelconques, soient  $a$  et  $b$  deux éléments  $\in E$ , figurant dans un même membre. Là, ils sont respectivement agrégés à deux produits partiels,  $A$  et  $B$ , directement unis par un signe opératoire  $\varphi_i$  indiquant qu'il faut composer ces produits suivant l'opération  $\varphi_i$ ,  $(A\varphi_iB)$ . Ainsi dans le 1<sup>er</sup> membre de (3),  $y$  et  $z$  font partie des expressions  $Y = (x\varphi_1y)$  et  $Z = z$ , qui sont liées par le symbole  $\varphi_2$ ;  $Y\varphi_2Z$ . Pareillement ces mêmes éléments  $a$  et  $b$  appartiennent à deux expressions  $A'$  et  $B'$ , avec  $A'\varphi_jB'$  ou  $B'\varphi_jA'$ , dans le 2<sup>me</sup> membre. Ne tenons pas compte du cas  $B'\varphi_jA'$ . A chaque couple d'éléments  $a, b \in E$  correspond un couple d'opérations  $\varphi_i, \varphi_j$ , en général. Cela définit une relation symétrique  $\varphi_i \mathcal{R} \varphi_j$  sur l'ensemble des  $\varphi$ . Soit  $(\equiv)$  l'extension de  $\mathcal{R}$  obtenue en posant  $\varphi_i \equiv \varphi_i$ ;  $\varphi_i \mathcal{R} \varphi_j \Rightarrow \varphi_i \equiv \varphi_j$ ;  $\varphi_i \mathcal{R} \varphi_j \mathcal{R} \varphi_k \Rightarrow \varphi_i \equiv \varphi_k$ . Cette extension détermine une partition sur l'ensemble

des  $\varphi$ , le cas de classes monomes n'étant pas exclu. Exemple, Dans (3),  $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv \varphi_5 \equiv \varphi_6$ ,  $\varphi_3 \equiv \varphi_7$ ,  $\varphi_4 \equiv \varphi_8$ .

**THÉORÈME.** *Si une équation demosienne entre des lois,  $\varphi_i$ , de multigroupoïdes sur un ensemble  $E$ , avec un élément scalaire bilatère commun, non singulier,  $s$ , satisfait à la condition que chaque élément  $\in E$  et figurant dans un membre, apparaisse dans l'autre une fois et une seule; alors (i) la solution générale de l'équation est telle que tous les  $\varphi_i$  d'une même classe, dans la partition des symboles, sont isotopes d'un même multigroupoïde,  $\varphi_0$ ; et (ii) ces  $\varphi_0$  sont précisément ceux qui vérifieraient l'équation fonctionnelle réduite, ou tous les  $\varphi_i$  d'une même classe sont remplacés par un seul. En particulier si l'équivalence des symboles est universelle, tous les  $\varphi_i$  sont isotopes du  $\varphi_0$  unique, solution de l'équation à une seule inconnue,  $\varphi$ .*

*Preuve.* (i) Soient  $y$  et  $t$  quelconques dans  $E$ . Soient  $\varphi_i$  et  $\varphi_j$  les deux signes opératoires entre lesquels  $y$  et  $t$  créent la relation  $\mathcal{R}$ ; donc  $\varphi_i \equiv \varphi_j$ . Remplaçons tous les éléments autres que  $y$  et  $t$  par  $s$ . Alors toutes les multiplications par les  $\varphi$  autres que  $\varphi_i$  et  $\varphi_j$  peuvent s'exprimer comme des translations. Par exemple, ([6], p.231), si  $x = z = u = s$ , (3) devient  $(y\Gamma_1\Delta_2)\varphi_3(t\Delta_4) = (y\Gamma_6\Gamma_5)\varphi_7(t\Gamma_8)$ . Les translations ayant leur produit dans  $\mathfrak{S}_E$ , une telle relation est nécessairement de la forme  $[(yP)\varphi_i(tQ)]R' = [(yP')\varphi_j(tQ')]R$ , qui, par le changement de variables  $u = yP$ ,  $v = tQ$ ,  $\zeta = R'R^{-1}$ ,  $\xi = P^{-1}P'$ ,  $\eta = Q^{-1}Q'$ , se ramène à

$$(4) \quad (u\varphi_i v)\zeta = (u\xi)\varphi_j(v\eta), \quad \xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{S}_E,$$

ce qui est une isotopie. Il résulte de la définition de l'équivalence des signes opératoires que les symboles d'une même classe par rapport à cette équivalence sont isotopes deux à deux, donc isotopes d'un même multigroupoïde  $M$ .

(ii) Considérons la solution la plus générale de l'équation demosienne. Par un choix convenable de ses paramètres on peut lui faire décrire toutes les solutions particulières et celles-ci satisferont toujours à la condition de rester, au sein de chaque classe de symboles, isotopes d'un multigroupoïde fixe  $E(\varphi_0)$ . Choisissons la solution particulière où tous les  $\varphi_i$  d'une même classe sont pris égaux. Les divers multigroupoïdes  $E(\varphi')$  satisfaisant l'équation fonctionnelle ainsi obtenue sont encore respectivement isotopes des  $E(\varphi_0)$  et de tous les autres. On pourra donc choisir ces  $E(\varphi')$  pour être les  $E(\varphi_0)$ . Même quand l'équation n'est pas équilibrée la

méthode donne encore des informations sur la structure des  $E(\varphi_i)$ .

**Associativité demosienne.** Dans (1) l'équivalence des symboles est universelle. Les quatre multigroupeïdes solution sont isotopes de celui qui satisfait  $(x\varphi y)\varphi z = x\varphi(y\varphi z)$ , c-à-d. l'associativité usuelle.  $E(\varphi_0)$  est donc un multi-semigroupe quelconque. En particulier, si les  $E(\varphi_i)$  sont des quasigroupes, on retrouve le théorème de Belousov [1]. En posant  $\Delta_1\Delta_2 = \xi$ ,  $\Delta_4\Gamma_3 = \theta = \Gamma_1\Delta_2$ ,  $\Delta_2 = \mu$ ,  $\Gamma_4\Gamma_3 = \lambda$ ,  $\Gamma_3 = \eta$  dans les expressions trouvées pour  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ ,  $\varphi_4$  dans [6], on voit que  $E(\varphi_1)$ ,  $E(\varphi_2)$ ,  $E(\varphi_3)$ ,  $E(\varphi_4)$  sont respectivement isotopes du multigroupeïde associatif  $E(\times)$ , avec les composantes homogènes

$$(5) \quad (\xi, \theta, \mu), (\mu, \lambda, \zeta), (\xi, \eta, \zeta), (\theta, \lambda, \eta),$$

où une composante peut être prise identique sans nuire à la généralité. C'est aussi la solution obtenue dans ([7], Remarque 7.6).

**Entropie demosienne.** Dans (2) la partition des symboles est universelle. Les six multigroupeïdes, avec élément scalaire non-singulier bilatère commun, seront donc isotopes d'un seul, satisfaisant lui-même à la loi d'entropie usuelle  $(xy)(zt) = xz(yt)$ , c'est-à-dire d'un multigroupeïde entropique. S'il ne s'agit que de quasi-groupes, en vertu d'un théorème de Toyoda ([9], p. 241, pour l'essentiel) *on voit immédiatement et sans calcul que les six quasigroupes  $E(\varphi)$  sont isotopes d'un même groupe abélien*. Etendons cela aux multigroupeïdes.

**LEMME.** *Si un multigroupeïde entropique,  $M = E(.)$  contient un élément  $s$ , possédant une unité bilatère  $u(u.s = s.u = s)$  et si  $s$  et  $u$  sont tous deux scalaires non-singuliers des deux côtés, alors,  $M$  sera isotope d'un multigroupeïde associatif abélien avec  $h = s.s$  comme unité scalaire bilatère.*

**Preuve.** Puisque  $s$  et  $u$  sont scalaires non-singuliers, leurs translations sont des permutations de  $E$ . Soit  $Q = E(\circ)$  l'isotope de  $M$  défini par  $x \circ y = (x\Delta_s^{-1}).(y\Gamma_s^{-1})$ .

(i),  $h = s.s$  est unité scalaire des deux côtés de  $Q$  car

$$h \circ y = [(s.s)\Delta_s^{-1}].(y\Gamma_s^{-1}) = s.(y\Gamma_s^{-1}) = y\Gamma_s^{-1}\Gamma_s = y,$$

$$x \circ h = (x\Delta_s^{-1}).[(s.s)\Gamma_s^{-1}] = (x\Delta_s^{-1}).s = x\Delta_s^{-1}\Delta_s = x.$$

(ii) Puisque  $M$  est entropique

$$(x.y).s = (x.y).(u.s) = (x.u).(y.s).$$

Si  $x = s$ , cela devient  $(s.y).s = s.(y.s)$ , ou

$$(6) \quad \Gamma_s \Delta_s = \Delta_s \Gamma_s;$$

d'autre part en écrivant la précédente égalité sous la forme  $(x.y)\Delta_s = (x\Delta_u).(y\Delta_s)$  et en changeant de notations, on a

$$(7) \quad \begin{aligned} &[(X\Delta_u^{-1}).(Y\Delta_s^{-1})]\Delta_s = X.Y, \\ &(X.Y)\Delta_s^{-1} = (X\Delta_u^{-1}).(Y\Delta_s^{-1}). \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} s.(x.y) &= (s.u).(x.y) = (s.x).(u.y), \\ (x.y)\Gamma_s &= (x\Gamma_s).(y\Gamma_u) \\ (8) \quad (X.Y)\Gamma_s^{-1} &= (X\Gamma_s^{-1}).(Y\Gamma_u^{-1}). \end{aligned}$$

On a alors

$$P = (a \circ b) \circ (c \circ d) = \{[(a\Delta_s^{-1}).(b\Gamma_s^{-1})]\Delta_s^{-1}\} \cdot \{[(c\Delta_s^{-1}).(d\Gamma_s^{-1})]\Gamma_s^{-1}\}.$$

Utilisant (7) et (8)

$$P = [(a\Delta_s^{-1}\Delta_u^{-1}).(b\Gamma_s^{-1}\Delta_s^{-1})] \cdot [(c\Delta_s^{-1}\Gamma_s^{-1}).(d\Gamma_s^{-1}\Gamma_u^{-1})].$$

Tenant compte de ce que  $E(\cdot)$  est entropique et de (6),  $P$  devient

$$P = [(a\Delta_s^{-1}\Delta_u^{-1}).(c\Gamma_s^{-1}\Delta_s^{-1})] \cdot [(b\Delta_s^{-1}\Gamma_s^{-1}).(d\Gamma_s^{-1}\Gamma_u^{-1})].$$

c'est-à-dire  $(a \circ c) \circ (b \circ d)$ . Donc  $E(\circ)$  est entropique.

(iii), Si on fait  $a = d = h$ , on a, puisque  $h$  est neutre,

$$b \circ c = (h \circ b) \circ (c \circ h) = (h \circ c) \circ (b \circ h) = c \circ b,$$

donc  $Q$  est commutatif. En faisant  $b = h$ , on a  $(a \circ h) \circ (c \circ d) = (a \circ c) \circ (h \circ d)$ , ou  $a \circ (c \circ d) = (a \circ c) \circ d$ , et  $Q$  est associatif.

THÉORÈME. (i) Si six multigroupoïdes  $\varphi_1, \dots, \varphi_6$  sur un ensemble  $E$ , avec un élément scalaire non-singulier bilatère commun  $s$ , admettant à son tour une unité bilatère  $u$ , scalaire non-singulière, la même dans tous les  $E(\varphi_i)$ , satisfont l'entropie demosienne (2), alors ces multigroupoïdes sont isotopes d'un même multigroupoïde associatif abélien  $Q = E(\circ)$ . (ii) La solution la plus générale est fournie par les isotopies de composantes

$$1 : (\xi, \theta, \mu), \quad 2 : (\mu, \alpha, \zeta), \quad 3 : (\delta, \lambda Y^{-1}, \alpha), \quad 4 : (\xi X, \delta, \beta),$$

5 :  $(\beta, \eta, \zeta)$ , 6 :  $(\theta, \lambda, \eta)$ , d'un  $Q = E(\circ)$  quelconque, admettant l'autotopie  $(X, Y, 1)$ , les  $\xi, \theta, \mu, \alpha, \zeta, \delta, \lambda, \beta, \eta$  étant des permutations arbitraires de  $\mathfrak{S}_E$ .

*Preuve.* (i) est immédiat; (ii) Pour déterminer les composantes des isotopies faisons  $z = s$ ; (2) devient

$$(x\varphi_1 y)\varphi_2(t\Gamma_{s,3}) = (x\Delta_{s,4})\varphi_5(y\varphi_6 t). \text{ En introduisant les isotopies}$$

$$(9) \quad u\psi_2 v = u\varphi_2(v\Gamma_{s,3}),$$

$$(10) \quad u\psi_3 v = (u\Delta_{s,4})\varphi_5 v,$$

cela devient  $(x\varphi_1 y)\psi_2 t = x\psi_3(y\varphi_6 t)$ , ce qui est l'associativité démosienne. Donc d'après (5),  $(x\varphi_1 y)\mu = (x\xi) \circ (y\theta)$ , puis

$$(x\psi_2 y)\zeta = (x\mu) \circ (y\lambda), \text{ d'où, d'après (9)} x\psi_2 y = x\psi_2(y\Gamma_{s,3}^{-1}) =$$

$$[(x\mu) \circ (y\Gamma_{s,3}^{-1}\lambda)]\zeta^{-1} = [(x\mu) \circ (y\alpha)]\zeta^{-1} \text{ et } (x\psi_3 y)\zeta = (x\xi) \circ (y\eta),$$

$$\text{d'où d'après (10)} x\varphi_5 y = (x\Delta_{s,4}^{-1})\psi_3 y = [(x\Delta_{s,4}^{-1}\xi) \circ (y\eta)]\zeta^{-1} =$$

$[(x\beta) \circ (y\eta)]\zeta^{-1}$ . En prenant des idéterminées pour les composantes des autres isotopies, les six isotopies seront

$$1 : (\xi, \theta, \mu), \quad 2 : (\mu, \alpha, \beta), \quad 3 : (\delta, \varepsilon, k),$$

$$4 : (\chi, \mu, T), \quad 5 : (\beta, \eta, \zeta), \quad 6 : (\theta, \lambda, \eta).$$

Par symétrie  $k = \varepsilon$ ,  $R = \delta$ ,  $T = \beta$ . Portant ces valeurs dans (2)

$$[(x\xi \circ y\theta)\mu^{-1}\mu \circ (z\delta \circ t\varepsilon)\alpha^{-1}\alpha]\zeta^{-1} = [(x\chi \circ z\delta)\beta^{-1}\beta \circ (y\theta \circ t\lambda)\eta^{-1}\eta]\zeta^{-1}$$

ou  $x\xi \circ y\theta \circ z\delta \circ t\varepsilon = x\chi \circ z\delta \circ y\theta \circ t\lambda$ ,

enfin, en remplaçant  $y\theta$  et  $z\delta$  par l'unité,  $h$ , de  $Q$ ,

$x\xi \circ t\varepsilon = x\chi \circ t\lambda$ , donc  $(X = \xi^{-1}\chi, Y = \varepsilon^{-1}\lambda, Z = 1)$  est une autotopie principale de  $Q$ . On peut choisir arbitrairement  $\xi$  et  $\lambda$  et prendre  $\chi = \xi X$ ,  $\varepsilon = \lambda Y^{-1}$ . Comme on peut soumettre  $Q$  à un isomorphisme, il reste 8 constantes arbitraires et une autotopie. Si les  $\varphi_i$  sont des quasigroupes, en prenant l'autotopie identique, on a, comme cas particulier, la solution [4].

**Lois dérivées de l'entropie.** Les  $\varphi_i$  étant supposés être des quasigroupes, on peut faire une étude analogue à celle de FARAGO pour l'associativité (Les *Publ. M. Debrecen*, 3, 1953, p. 133 donnent 16 formes, mais 8 et 13 font double emploi, comme isomorphes à 9 et 14 par abc). Cf aussi [8]. Il y a 5 formes (Shape, [2], p. 153) du produit de 4 facteurs. Prenons  $ab \cdot cd$  dans les deux membres;

on trouve 17 équations non isomorphes, que l'on peut ranger en deux suites de manière que chaque égalité dérive de la précédente en permutant deux facteurs dans un de ses membres.

(11)  $dc.ab = db.ac$ ; ce qui est la loi du rectangle ([5], p. 155, équ. 39)  
 (12)  $ab.dc = db.ac$ ; (15)  $ab.cd = ac.bd$ ; (18)  $ab.cd = db.ca$ ;  
 (13)  $ab.cd = db.ac$ ; (16)  $ab.cd = ca.bd$ ; (19)  $ab.cd = bd.ca$ ;  
 (14)  $ab.cd = ac.db$ ; (17)  $ab.cd = ca.db$ ; (20)  $ab.dc = bd.ca$ .

Seconde suite :

(21)  $ab.cd = cd.ab$ ; (23)  $ab.cd = ab.dc$ ; (25)  $ab.cd = dc.ba$ ;  
 (22)  $ab.cd = ab.cd$ ; (24)  $ab.cd = dc.ab$ ; (26)  $ab.cd = ba.dc$ ;  
 (27)  $ab.cd = ba.cd$ .

La solution d'une équation comme  $A = C\varphi_i B$  dérive de celle de  $A = B\psi_i C$  en prenant  $\varphi_i$  conjointe ([5], p. 155) de  $\psi_i$ . Avec les notations du théorème précédent on a les expressions des  $\varphi_i$  dans l'ordre  $\varphi_1, \dots, \varphi_6$ .

(11),  $(y\delta \circ x\varepsilon)\alpha^{-1}, (y\mu \circ x\alpha)\zeta^{-1}, (x\xi \circ y\theta)\mu^{-1},$   
 $(y\theta \circ x\lambda)\eta^{-1}, (y\beta \circ x\eta)\zeta^{-1}, (x\chi \circ y\delta)\beta^{-1},$   
 (12)  $(x\xi \circ y\theta)\mu^{-1}, (x\mu \circ y\alpha)\zeta^{-1}, (y\delta \circ x\varepsilon)\alpha^{-1},$   
 $(y\theta \circ x\lambda)\eta^{-1}, (y\beta \circ x\eta)\zeta^{-1}, (x\chi \circ y\delta)\beta^{-1},$   
 (13)  $(x\xi \circ y\theta)\mu^{-1}, (x\mu \circ y\alpha)\zeta^{-1}, (x\delta \circ y\varepsilon)\alpha^{-1},$   
 $(y\theta \circ x\lambda)\eta^{-1}, (y\beta \circ x\eta)\zeta^{-1}, (x\chi \circ y\delta)\beta^{-1},$   
 (14)  $(x\xi \circ y\theta)\mu^{-1}, (x\mu \circ y\alpha)\zeta^{-1}, (x\delta \circ y\varepsilon)\alpha^{-1},$   
 $(x\chi \circ y\delta)\beta^{-1}, (x\beta \circ y\eta)\zeta^{-1}, (y\theta \circ x\lambda)\eta^{-1},$   
 (15)  $(x\xi \circ y\theta)\mu^{-1}, (x\mu \circ y\alpha)\zeta^{-1}, (x\delta \circ y\varepsilon)\alpha^{-1},$   
 $(x\chi \circ y\delta)\beta^{-1}, (x\beta \circ y\eta)\zeta^{-1}, (x\theta \circ y\lambda)\eta^{-1},$   
 (16)  $(x\xi \circ y\theta)\mu^{-1}, (x\mu \circ y\alpha)\zeta^{-1}, (x\delta \circ y\varepsilon)\alpha^{-1},$   
 $(y\chi \circ x\delta)\beta^{-1}, (x\beta \circ y\eta)\zeta^{-1}, (x\theta \circ y\lambda)\eta^{-1},$   
 (17)  $(x\xi \circ y\theta)\mu^{-1}, (x\mu \circ y\alpha)\zeta^{-1}, (x\delta \circ y\varepsilon)\alpha^{-1},$   
 $(y\chi \circ x\delta)\beta^{-1}, (x\beta \circ y\eta)\zeta^{-1}, (y\theta \circ x\lambda)\eta^{-1},$   
 (18)  $(x\xi \circ y\theta)\mu^{-1}, (x\mu \circ y\alpha)\zeta^{-1}, (x\delta \circ y\varepsilon)\alpha^{-1},$   
 $(y\theta \circ x\lambda)\eta^{-1}, (y\beta \circ x\eta)\zeta^{-1}, (y\chi \circ x\delta)\beta^{-1},$   
 (19)  $(x\xi \circ y\theta)\mu^{-1}, (x\mu \circ y\alpha)\zeta^{-1}, (x\delta \circ y\varepsilon)\alpha^{-1},$   
 $(x\theta \circ y\lambda)\eta^{-1}, (y\beta \circ x\eta)\zeta^{-1}, (y\chi \circ x\delta)\beta^{-1},$   
 (20)  $(x\xi \circ y\theta)\mu^{-1}, (x\mu \circ y\alpha)\zeta^{-1}, (y\delta \circ x\varepsilon)\alpha^{-1},$   
 $(x\theta \circ y\lambda)\eta^{-1}, (y\beta \circ x\eta)\zeta^{-1}, (y\chi \circ x\delta)\beta^{-1},$

THÉORÈME. *La solution la plus générale de (22),  $(x\varphi_1y)\varphi_2(z\varphi_3t) = (x\varphi_4y)\varphi_5(z\varphi_6t)$ , où les  $\varphi_i$  sont des quasigroupes, sur un même ensemble  $E$ , est donnée par les isotopies*

$x\varphi_4y = (x\varphi_1y)X\lambda^{-1}$ ,  $x\varphi_5y = (x\lambda)\varphi_2(y\mu)$ ,  $x\varphi_6y = (x\varphi_3y)Y\mu^{-1}$ , où  $E(\varphi_1)$ ,  $E(\varphi_2)$  et  $E(\varphi_3)$  sont des quasigroupes arbitraires sur  $E$  et  $\lambda$ ,  $\mu$ , deux permutations quelconques de  $E$ , enfin  $(X, Y, 1)$  une autotopie principale de  $E(\varphi_2)$ .

*Preuve.* L'équivalence des signes opératoires définit 3 classes,  $\varphi_1 \equiv \varphi_4$ ,  $\varphi_2 \equiv \varphi_5$ ,  $\varphi_3 \equiv \varphi_6$ . Si  $z$  et  $t$  sont constantes  $(x\varphi_1y)\varphi_2a = (x\varphi_4y)\varphi_5b$ , ou  $x\varphi_4y = (x\varphi_1y)\Delta_{a,2}\Delta_{b,5}^{-1} = (x\varphi_1y)\zeta$ ,  $\zeta \in \mathcal{C}_E$ . Donc  $\varphi_4$  est une distortion ([5], p. 171, no 28) de  $\varphi_1$ . Si  $x$  et  $y$  sont constants,  $c\varphi_2(z\varphi_3t) = d\varphi_5(z\varphi_6t)$  et  $\varphi_6$  est encore une distortion de  $\varphi_3$ ;  $x\varphi_6y = (x\varphi_3y)\theta$ ,  $\theta \in \mathcal{C}_E$ . Si  $y = f$ ,  $z = g$ , = Cte,  $(x\Delta_{f,1})\varphi_2(t\Gamma_{g,3}) = (x\Delta_{f,4})\varphi_5(t\Gamma_{g,6})$  et  $\varphi_5$  est isotope principal de  $\varphi_2$ ;  $x\varphi_5y = (x\lambda)\varphi_2(y\mu)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathcal{C}_E$ . Pour que les isotopies conviennent il faut qu'elles vérifient (22),  $(x\varphi_1y)\varphi_2(z\varphi_3t) = [(x\varphi_1y)\zeta\lambda]\varphi_2[(z\varphi_3t)\theta\mu]$ . En posant  $x\varphi_1y = u$ ,  $z\varphi_3t = v$ , on a  $u\varphi_2v = (u\zeta\lambda)\varphi_2(v\theta\mu)$ . Donc  $(\zeta\lambda, \theta\mu, 1)$  est une autotopie de  $\varphi_2$ . Si  $(X, Y, 1)$  est une telle autotopie, on pourra choisir arbitrairement  $\lambda$  et  $\mu$  et prendre  $\zeta = X\lambda^{-1}$ ,  $\theta = Y\mu^{-1}$ , d'où la solution générale de l'énoncé.

On déduit de là, comme pour la première série, la table des solutions.

(21)	$\varphi_1$ ,	$\varphi_2$ ,	$\varphi_3$ ,	$(x\varphi_3y)Y\mu^{-1}$ ,	$(y\lambda)\varphi_2(x\mu)$ ,	$(x\varphi_1y)X\lambda^{-1}$ ,
(22)	»	»	»	$(x\varphi_1y)X\lambda^{-1}$ ,	$(x\lambda)\varphi_2(y\mu)$ ,	$(x\varphi_3y)Y\mu^{-1}$ ,
(23)	»	»	»	»	»	$(y\varphi_3x)Y\mu^{-1}$
(24)	»	»	»	$(y\varphi_3x)Y\mu^{-1}$ ,	$(y\lambda)\varphi_2(x\mu)$ ,	$(x\varphi_1y)X\lambda^{-1}$ ,
(25)	»	»	»	»	»	$(y\varphi_1x)X\lambda^{-1}$ ,
(26)	»	»	»	$(y\varphi_1x)X\lambda^{-1}$ ,	$(x\lambda)\varphi_2(y\mu)$ ,	$(y\varphi_3x)Y\mu^{-1}$ ,
(27)	»	»	»	»	»	$(x\varphi_3y)Y\mu^{-1}$ ,

## RÉFÉRENCES

(<sup>1</sup>) B. D. BELOUOV, Associativnye Sistemy Kvazigrupp, *Uspehi Mat. Nauk*, 13, (1958), fasc. 3, (81), 243.  
 (<sup>2</sup>) Ivor M. H. ETHERINGTON, On non associative combinations, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 59, (1939), 153-162.  
 (<sup>3</sup>) ——, Non associative arithmetics, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, Sec. A, 62, (1949), 442-453.

- (<sup>4</sup>) Miklos HOSZU, Belousov egy tételeiről és annak néhány alkalmazásáról, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Osztályának Közléményeibol*, 9, (1959), 51-56.
- (<sup>5</sup>) Albert SADE, Quasigroupes obéissant à certaines lois, *Revue de la Fac. des Sci. Univ. Istanbul*, Ser. A, 22, (1959), 151-184.
- (<sup>6</sup>) ——, Système demosien associatif de multigroupoïdes avec un scalaire non-singulier, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, 73, (1959), 231-234.
- (<sup>7</sup>) ——, Théorie des systèmes demosiens de groupoïdes, *Pacific. J. Math.* ...
- (<sup>8</sup>) ——, Systèmes demosiens de quasigroupes satisfaisant à l'associativité et à des lois similaires, *En préparation*.
- (<sup>9</sup>) Kôshichi TOYODA, Axioms of mean transformations and automorphic transformations of abelian groups, *Tôhoku math. J.*, 46, (1940), 239-251.

## Deuxième Section

### SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES

# On the statistical laws of linguistic distributions

BY

V. BELEVITCH (\*)

#### SUMMARY

The rank-frequency diagrams of statistical linguistics are reinterpreted as distribution curves of the cumulative probability of types in the catalogue versus the probability of tokens in the text. For such distributions, the closure condition  $\sum p_i = 1$  (which does not hold in general statistics for the independent variable) imposes certain relations between the mean, the variance, the number of elements in the catalogue and the average information content (negative entropy). Sections 2 to 4 are devoted to the mathematics of these relations, especially to their particular forms for truncated normal distributions. First and second order Taylor approximations to an arbitrary distribution law take the form of Zipf's and Mandelbrot's laws respectively. Experimental data lead to accept the truncated normal distribution with  $\sigma \approx 2,8$  bits as the general law for words. Data on letter and phoneme distributions seem to indicate that the standard deviation has the universal value  $\sigma \approx 1,4$  bits.

#### 1. RANK-FREQUENCY DIAGRAMS

It is an experimental fact that by counting frequencies of occurrence of various elements (letters, phonemes, words) in homogeneous texts written in a given language, and dividing them by the total number of elements of the same nature in the text, one often obtains relative frequencies that are stable (independent of the length of the text for sufficiently long texts). These relative frequencies define the a priori probabilities of the elements. Having used *texts* to obtain probabilities of various linguistic elements, one constructs *catalogues* of elements of identical nature (i.e. alphabet for letters, lexicon for words, etc.) in which each

(\*) Comité d'Etude et d'Exploitation des Calculateurs Electroniques « C.E.C.E. », 67, rue de la Croix de Fer, Brussels, Belgium.

element is listed with its probability, by order of non-increasing probabilities.

In normal statistical practice one defines discrete distributions by specifying the number  $N_i$  of elements having a dimension or some other measurable characteristic  $x_i$ . If  $N = \sum N_i$  is the total number of elements, the ratio  $f_i = N_i/N$  is the relative frequency, or probability of finding the value  $x_i$  for the dimension  $x$ . The cumulative probability is defined by

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^i f_k \quad (1)$$

and distribution curves are obtained by plotting the cumulative probability  $\varphi_i$  versus the dimension  $x_i$ .

Most linguistic elements (f.i. letters) have no measurable characteristic (dimension) according to which they could be ordered, except their text probabilities themselves. As there is no point in defining a distribution curve by a text probability versus a text probability, the only alternative is to plot the probability in the catalogue  $f_i$  versus the probability in the text  $p_i$ . The probability in the catalogue is defined by reference to experiments with an urn containing once each element  $i$ , marked with its text probability  $p_i$ : the catalogue probability  $f_i$  is the probability of drawing from the urn the text probability  $p_i$ . For a catalogue of  $N$  elements,  $N_i$  of which have the text probability  $p_i$ ,  $f_i$  is the ratio  $N_i/N$ , and the cumulative probability (1) in the catalogue is

$$\varphi_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^i N_k \quad (2)$$

But the sum  $\sum N_k$  in (2), i.e. the number of elements of text probabilities  $\leq p_i$ , is precisely the rank  $i$  in the catalogue, since elements are ranged in order of non-increasing frequencies. As a consequence (2) becomes  $\varphi_i = i/N$  and gives the *relative rank* in the catalogue. The distribution curves thus defined only differ from the usual rank-frequency diagrams, where the rank of each element in the catalogue is plotted versus its probability in the text, by the factor  $1/N$  transforming absolute rank into relative rank. As a conclusion, *rank-frequency diagrams can be interpreted as ordinary distribution curves giving the cumulative probability in the catalogue versus the probability in the text*. This establishes a relation between the paradigmatic and syntagmatic aspects of the language.

Information theory attributes to each element of probability  $p_i$  an information measure (negative entropy)  $x_i = -\log p_i$ , and it is therefore convenient to use logarithmic scales for text probabilities. When a logarithm of base 2 is used in the above definition, the information is measured in *bits*. In the analytical expressions, it is more convenient to use natural logarithms; this is equivalent to adopt  $\log_2 e = 1.44$  bits as natural unit of information (*binit*).

In general statistics, the range of the independent variable  $x$  is unrestricted. In statistical linguistics,  $x$  is related to a probability by

$$x = -\log p \quad (3)$$

and is essentially positive. An additional restriction results from the *closure condition*

$$\sum_1^N N_i p_i = 1 \quad (4)$$

which is transformed into

$$\sum N_i e^{-x_i} = 1 \quad (5)$$

or, since the probability in the catalogue was defined as  $f_i = N_i/N$ , into

$$\sum f_i e^{-x_i} = \frac{1}{N} \quad (6)$$

As a conclusion, *the closure condition determines the absolute number of elements in the catalogue from their relative distribution law*.

## 2. MEAN VALUES

When dealing with mean values, one should clearly distinguish between *averages over the text* and *averages over the catalogue*. The mean  $m$  and the variance  $\sigma^2$  as defined by

$$m = \frac{\sum N_i x_i}{N}; \sigma^2 = \frac{\sum N_i (x_i - m)^2}{N} \quad (7)$$

are averages over the catalogue. In the text, the number  $N_i$  of elements of measure  $x_i$  must be weighted proportionally to their probability of occurrence  $p_i$ , and the average information is

$$h = \frac{\sum N_i p_i x_i}{\sum N_i p_i}$$

Since the denominator is unity, this gives the mean information

$$h = - \sum N_i p_i \log p_i \quad (8)$$

in the sense of information theory. Finally (8) becomes

$$\frac{h}{N} = \sum f_i x_i e^{-x_i} \quad (9)$$

We now consider the case where the range of  $x$ , for which  $f$  takes significant values, is sufficiently small, i.e. *narrow distributions*, so that the function  $e^{-x}$  can be approximated by the Taylor expansion

$$e^{-x} = e^{-m} [1 - (x - m) + \frac{1}{2} (x - m)^2] \quad (10)$$

around the mean  $m$ . Condition (6), combined with (7), yields

$$e^{-m} (1 + \sigma^2/2) = 1/N \quad (11)$$

Similarly, in (9), the expansion of  $x e^{-x}$  is deduced from (10) by writing  $x = (x - m) + m$  and neglecting the third order term. One finds

$$x e^{-x} = m e^{-m} \left[ 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)(x - m) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right)(x - m)^2 \right]$$

and (9) becomes

$$\frac{h}{N} = m e^{-m} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right) \sigma^2 \right] \quad (12)$$

Since  $\sigma^2$  is small for a narrow distribution, (11) becomes approximately

$$m = \log N + \frac{1}{2} \sigma^2 \quad (13)$$

On the other hand, the ratio of (12) and (11) gives, with the same approximation,

$$h = \log N - \frac{1}{2} \sigma^2 \quad (14)$$

or

$$h = m - \sigma^2 \quad (15)$$

If all  $N$  elements have the same text probability  $1/N$ , the information is the constant  $\log N$ . By comparison, formulae (13) and (14) show that *the effect of a small spread in the probabilities is to reduce the average information in the text* (and this is well known from information theory) *and to increase by the same amount the average over the catalogue*. Furthermore, *the variance of the distribution is precisely the difference between both averages*.

### 3. TRUNCATED NORMAL DISTRIBUTIONS

It is often convenient to approximate discrete distributions with a large number of elements by continuous distributions. The number of elements of dimension comprised between  $x$  and  $x + dx$  is  $N d\varphi(x) = N \varphi'(x) dx = N f(x) dx$ , where  $\varphi(x)$  is the distribution function and  $f(x) = \varphi'(x)$  the probability density. A Gaussian, or normal, distribution of mean  $m$  and variance  $\sigma^2$  is defined by the probability density

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (16)$$

The range of the normal distribution is  $-\infty \leq x \leq \infty$  and, since  $x$  is essentially positive in linguistic applications, the distributions cannot be rigorously normal. In the following we will consider truncated normal distributions where (16) is restricted to some positive interval  $x_a \leq x \leq x_b$ , the density assuming the value 0 outside. We will start, however, by the case where the truncation is made at points sufficiently far away from the mean, so that the tails of the distribution are negligible anyway.

For a continuous distribution, conditions (6) and (9) are replaced by

$$\frac{1}{N} = \int_{x_a}^{x_b} f(x) e^{-x} dx; \quad \frac{h}{N} = \int_{x_a}^{x_b} x e^{-x} f(x) dx \quad (17)$$

In these expressions also, we first replace the integration limits by  $\pm \infty$ , neglecting the truncation. Absolute convergence is still ensured, for the increase of  $|x|$  and  $e^{-x}$  for  $x = -\infty$  is less rapid than the decrease of (16).

For the density (16), the integrals (17) are reduced to the error integral by transforming the exponent according to

$$x + \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} = \frac{(x+\sigma^2-m)^2}{2\sigma^2} + m - \frac{\sigma^2}{2} \quad (18)$$

By the linear transformation

$$z = \sigma + \frac{x-m}{\sigma} \quad (19)$$

the first equation (17) becomes

$$\frac{1}{N} = \frac{e^{-m+\sigma^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = e^{-m+\sigma^2/2} \quad (20)$$

and is equivalent to (13). The second equation (18) becomes

$$\frac{h}{N} = \frac{e^{-m+\sigma^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (m - \sigma^2 + \sigma z) e^{-z^2/2} dz \quad (21)$$

The term in  $z$  in the integrand is an odd function and does not contribute to the integral, so that (21) reduces to

$$\frac{h}{N} = (m - \sigma^2) e^{-m+\sigma^2/2} \quad (22)$$

and, by comparison with (20), one obtains (15).

The remaining part of this section is devoted to the derivation of the rigorous formulae replacing (20) and (22) and taking the truncation into account. For the error integral, we will use the notation

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-u^2/2} du \quad (23)$$

so that the distribution function corresponding to the density (16), with neglected truncation, is

$$\varphi(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \quad (24)$$

If truncation is taken into account, the density cannot be (16), but must be corrected by a factor  $a > 1$  in order to normalize to unity the integral in the finite range. Similarly the distribution function is no longer (24) but is of the form

$$\varphi(x) = a\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) - b \quad (25)$$

deduced from the density (16) multiplied by  $a$ , with an integration constant denoted  $-b$ . These constants are determined by the conditions  $\varphi(x_a) = 0$ ,  $\varphi(x_b) = 1$ , and one obtains

$$a = \frac{1}{\Phi\left(\frac{x_b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_a-m}{\sigma}\right)}; \quad b = \frac{\Phi\left(\frac{x_a-m}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{x_b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_a-m}{\sigma}\right)} \quad (26)$$

For the truncated distribution, the integrals (17), applied to the density  $a f(x)$ , become

$$1/N = ace^{-m+\sigma^2/2} \quad (27)$$

$$\frac{h}{N} = ae^{-m+\sigma^2/2} \left[ c(m - \sigma^2) + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} (e^{-z_a^2/2} - e^{-z_b^2/2}) \right] \quad (28)$$

where  $z_a$  and  $z_b$  have the values resulting from (19) with  $x = x_a$  or  $x_b$ , and where  $c$  denotes the error integral with the limits  $z_a$  and  $z_b$ , thus

$$c = \Phi \left( \sigma + \frac{x_b - m}{\sigma} \right) - \Phi \left( \sigma + \frac{x_a - m}{\sigma} \right) \quad (29)$$

In (25), the term  $b$  introduces a correction at high probabilities, which is negligible in most applications because  $x_a - m$  is negative and equals several times  $\sigma$ . On the contrary, the effect of the truncation at low frequencies is often not negligible, for statistics do not generally extend sufficiently far above the mean. The practical form of (27) is thus deduced from the approximation  $x_a = -\infty$ , and is

$$N = e^{m-\sigma^2/2} \frac{\Phi \left( \frac{x_b - m}{\sigma} \right)}{\Phi \left( \sigma + \frac{x_b - m}{\sigma} \right)} \quad (30)$$

In a complete statistical count, the lowest frequency corresponds to a single occurrence in the text, thus to probability  $p_b = 1/L$ , where  $L$  is the length of the text. By (3), one has

$$x_b = \log L \quad (31)$$

and (30) gives a relation between the length of the text and the extension of the vocabulary. It is obvious that (30) reduces to (13) for  $x_b = \infty$ .

#### 4. APPROXIMATIONS TO NORMAL DISTRIBUTIONS

We consider first an arbitrary distribution function  $\varphi(x)$  in the neighbourhood of a point  $x_0$ . The Taylor expansion is

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + (x - x_0) f(x_0)$$

where  $f(x)$  is the corresponding probability density. The logarithmic slope of distribution function is approximately

$$\log \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} = \log \left[ 1 + \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)} (x - x_0) \right] \cong (x - x_0) \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)} \quad (32)$$

If one considers an element  $x = x_i$  corresponding to a text probability  $p_i = e^{-x_i}$ , its rank  $i$  is given by  $N\varphi(x_i)$ . Introducing the similar notations  $p_0$  and  $i_0$  for the reference point  $x_0$ , (32) becomes

$$\log \frac{p_i}{p_0} = -A \log \frac{i}{i_0} \quad (33)$$

with

$$A = \frac{\varphi(x_0)}{f(x_0)} \quad (34)$$

Equation (33) is independent from any assumption on the distribution law, and merely shows that (34) measures the slope of the tangent, at  $x_0$ , to the rank-frequency characteristic with logarithmic scales for both coordinates.

Expression (33), or

$$\frac{i}{i_0} = \left( \frac{p_i}{p_0} \right)^{-1/A} \quad (35)$$

is similar to Zipf's law, but with a variable slope. By taking into account second order terms in the Taylor expansion, it is possible to obtain a correction similar to the one introduced in Zipf's law by Mandelbrot, i.e. to arrive at a form

$$\frac{i}{i_0} = s \left( \frac{p_i}{p_0} \right)^{-1/B} - t \quad (36)$$

instead of (35), or, equivalently, to

$$p_i = P(i + \rho)^{-B} \quad (37)$$

with

$$P = p_0(i_0 s)^B; \rho = i_0 t \quad (38)$$

The best values of the parameters are obtained by identifying the second-order Taylor expansion of the right-hand side of (36), i.e.

$$s e^{(x_i - x_0)/B} - t = s - t + s \frac{x_i - x_0}{B} + \frac{s(x_i - x_0)^2}{2B^2}$$

with the corresponding expansion of the distribution function

$$\frac{\varphi(x_i)}{\varphi(x_0)} = 1 + \frac{(x_i - x_0) f(x_0)}{\varphi(x_0)} + \frac{(x_i - x_0)^2 f'(x_0)}{2\varphi(x_0)}$$

This gives

$$s = \frac{[f(x_0)]^2}{\varphi(x_0) f'(x_0)}; \quad t = s - 1 \quad (39)$$

$$B = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (40)$$

and one has  $t > 0$  as long as the curvature of the characteristic at  $x_0$  is positive.

For a normal distribution (truncated or not), (40) becomes

$$B = \frac{\sigma^2}{m - x_0} \quad (41)$$

Simple expressions for the other parameters are only obtained if some approximations are introduced, and truncation neglected. For the linguistic applications it is of special importance to discuss the behavior of the characteristics at high frequencies, where the statistics are the most reliable. We will thus assume  $x_0 \ll m$  and use the asymptotic expansion (1)

$$\Phi(-u) = \frac{e^{-u^2/2}}{u} \left( 1 - \frac{1}{u^2} + \dots \right) \quad (42)$$

valid for large positive values of  $u$ . When the first term alone of (42) is considered, the value (41) is obtained for the exponent (34) of the Zipf approximation. With two terms in (42), (39) gives

$$s = 1 + \frac{\sigma^2}{(m - x_0)^2}; \quad t = \frac{\sigma^2}{(m - x_0)^2} \quad (43)$$

By (15), (41) becomes

$$B = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + h - x_0} \quad (44)$$

When the approximating point  $x_0$  is the point of highest frequency  $x_a$ , (44) gives  $B < 1$ , since the average information  $h$  is certainly larger than the minimum information  $x_a$ . When  $x_0$  increases

(1) The possibility of deducing Mandelbrot's law with  $B \leq 1$  from the asymptotic expansion of the error integral was mentioned to the writer by A. OETTINGER, and originated the present investigation.

starting from  $x_a$ , B increases and passes through the value 1 for  $x_0 = h$ .

## 5. LETTER AND PHONEME DISTRIBUTIONS

Because of the small size of the alphabets, such distributions are relatively irregular, but definite systematic trends can, however, be noticed. On the other hand, thanks to the small size of the alphabets, the statistics are more reliable, and the distributions are well known over their entire ranges. Fig. 1 shows data from a number of languages (2); the lower scale is logarithmic in  $p$ , and

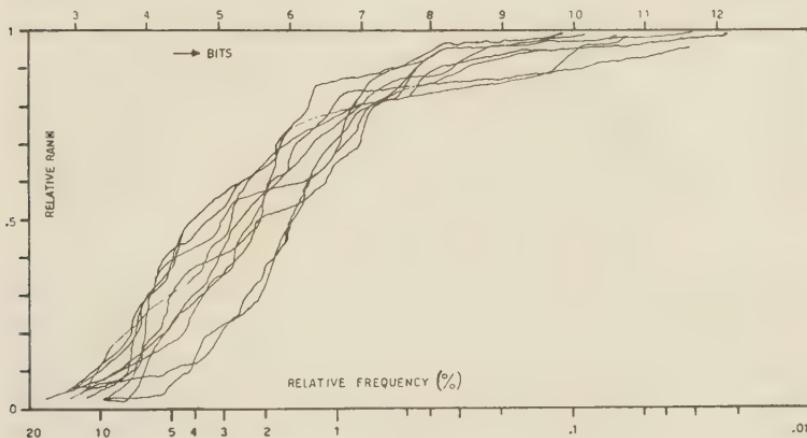


Fig. 1

the upper scale is linear in bits. It appears immediately that all curves are very similar, and all ranges extend from approximately 2,5 to some 11 bits. All distributions are relatively narrow, and it is therefore expected by (13) that the horizontal shift between the various curves is correlated with the size of the alphabet (varying from  $N = 21$  to 49 in the examples considered). This is indeed the case, as it appears from Fig. 2 where each curve has been shifted by  $\log N$ ; in other words, the abscissa in fig. 2 is the relative frequency  $p/p_m$  with respect to the equiprobable value  $p_m = 1/N$ .

(2) Most of these have already been discussed in V. BELEVITCH « Théorie de l'information et statistique linguistique », *Bull. Acad. Roy. Belg. (Cl. des Sc.)* avr. 1956 pp. 419-436.

Fig. 2 clearly shows that all distributions are practically identical and, in particular, have the same variance. Our best estimate of the common value is  $\sigma = 1,4$  bits. The corresponding normal distribution shifted by  $\sigma^2/2$  relatively to the point of abscissa  $\log N$  in accordance with (13), is the dotted curve of fig. 2.

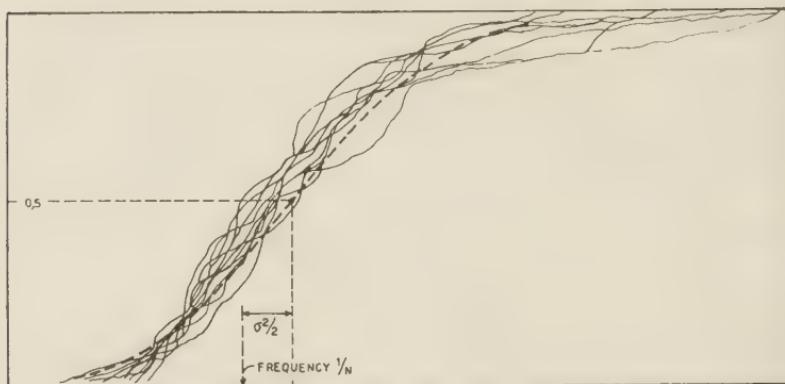


Fig. 2

Formulae (13-15) can be checked on the example of Russian phonemes for which particularly detailed data are available (3). The value of  $\log N$  is  $\log_2 42 = 5,42$  bits, and the published value of  $h$  is 4,78 bits. From (15), one obtains  $\sigma = 1,33$  bits, and from (13),  $m = 6,1$  bits; the last value agrees with the median of the distribution curve deduced from the published data.

## 6. WORD DISTRIBUTIONS

According to Guiraud (4), Zipf's formula, and even Mandelbrot's correction, do not agree with most experimental distributions at low frequencies. The truncated lognormal character of the actual distributions seems to have been suspected by several authors (5). If truncation is neglected, a lognormal distribution

(3) E.C. CHERRY, M. HALLE, R. JAKOBSON, « Toward the logical description of Languages in their phonemic aspect », *Language*, vol. 29 n° 1, p. 34, March 1953.

(4) P. GUIRAUD, *Les caractères statistiques du vocabulaire*, Paris, Press. Univ. 1954.

(5) See f. i., J. AITCHISON, J.A.C. BROWN, *The lognormal distribution*, Cambridge 1957; p. 101.

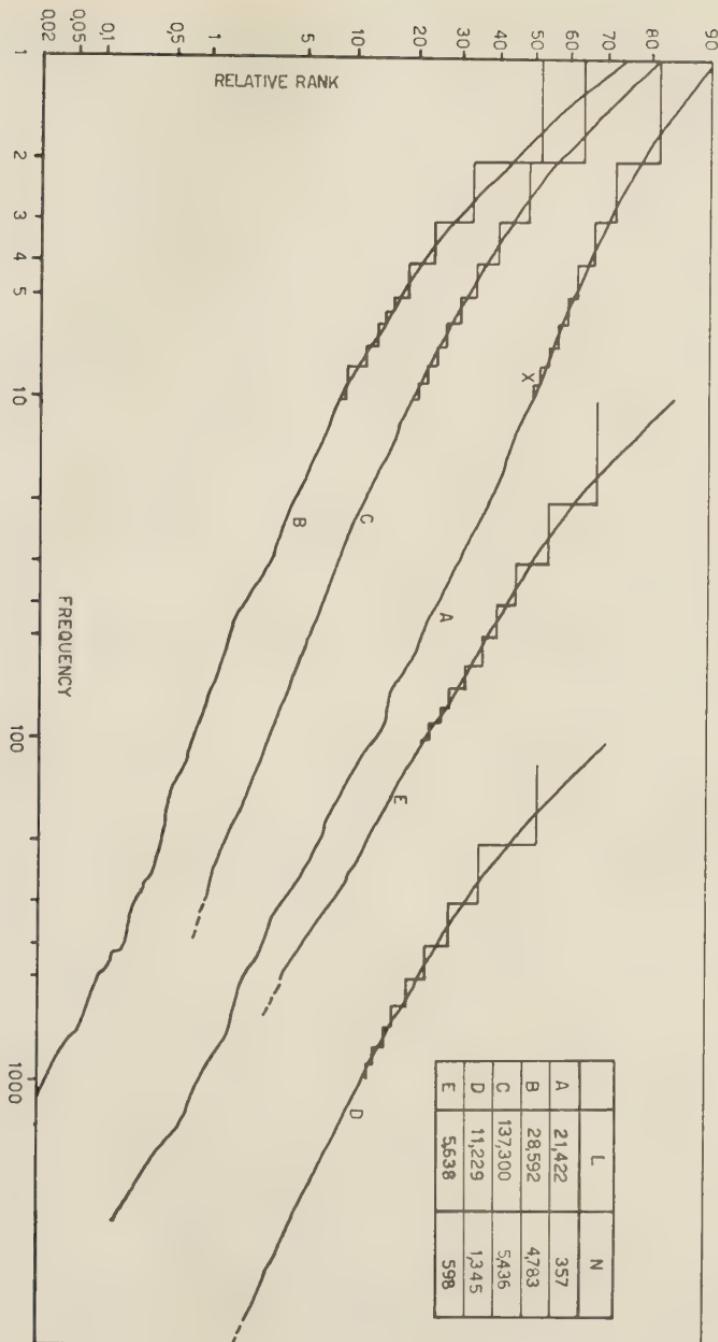


Fig. 3

becomes a straight line on logarithmic probability paper; this is checked for a few examples on Fig. 3, and it will be established herebelow that the deviations from linearity at low frequencies are quantitatively explained by the truncation effect.

The abscissae in fig. 3 are the absolute frequencies, as published in various sources (6), but curve E has been shifted by a factor 10 and curve D by a factor 100, to avoid overlapping. The table included in fig. 3 gives the extensions of the vocabulary (N) and of the text (L) mentioned in the source material. The discrete steps at the low frequency ends of the curves arise because the numbers of occurrences of the rarest words are necessarily small integers. Strictly, the usual definition of the rank-frequency relation would yield a continuous curve passing through the top points of the ladder, but the similar relation based on the complementary rank gives a curve passing through the bottom points. A unique smoothed continuous distribution curve can therefore only be defined by joining the vertical mid-points of the ladder, and this has been done in fig. 3. In particular, the first point of the smoothed distribution, corresponding to frequency 1, is  $1 - N_1/2N$ , where  $N_1$  is the number of hapaxlegomena and N the total number of different words in the sample.

For curve A, the truncation effect is practically negligible because the statistics extends well above the mean. The slope of the straight line (abscissa interval corresponding to a decrease of the ordinate from 50 to 16%) defines the standard deviation as  $\sigma = 2,8$  bits. From this value, and the value of N mentioned in the table, one can compute  $m$  by (13), and the corresponding median frequency is  $L e^{-m}$ ; the value thus obtained is shown by a cross on fig. 3. Fig. 4 shows the curve of fig. 3A in bilogarithmic coordinates, and the dotted straight lines are Zipf's approximations at  $x = x_a$  and  $x = h$ , the values of the slope being computed by (44), and the value of  $h$  by (15).

The truncation effect at the low frequency end will be discussed

(6) Curve A is based on data for English function words (G.A. MILLER, E.B. NEWMAN, E.A. FRIEDMAN, « Length frequency statistics for written English », *Inform. and Control*, vol. 1 n° 4 pp. 370-389; Dec. 1958). Curve B corresponds to Russian words in the Captain's Daughter by Pushkin (H.H. JOSSELSON, *The Russian word count*, Detroit, 1953). Curves C (New testament) and D (St Mark) are based on R. MORGENTHALER, *Statistik des neutestamentlichen Wortschatzes*. Zurich 1958. Curve E is for French adjectives from all 8 tragedies of Racine (ref. note 4 p. 31).

on the example of curve B of fig. 3. The corresponding bilogarithmic representation of fig. 5 shows that the value of the initial slope

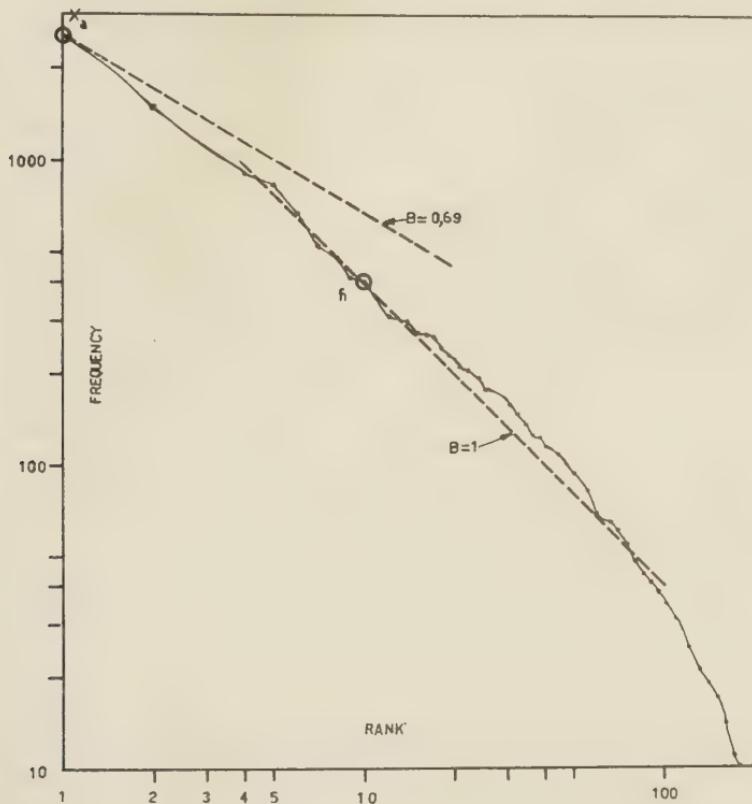


Fig. 4

is 0,48. Since the experimental value of  $x_a$  is 3,23 binit, (41) requires

$$0,48 (m - 3,23) = \sigma^2$$

A second relation between  $m$  and  $\sigma$  is (30), for  $N$  is known and the experimental value of  $x$  is 10,9 binit. The solution of these equations is  $m = 11,12$  binit = 16,1 bits and  $\sigma = 2,8$  bits. The correction factor in (25) is

$$1/a = \Phi \left( \frac{x_b - m}{\sigma} \right) = 0,455$$

and this transforms curve B into curve B' as shown on the right hand side of fig. 6. The cross corresponds to the computed value

of  $m$ . This shows that the truncation effect completely accounts for the curvature at the low frequency end.

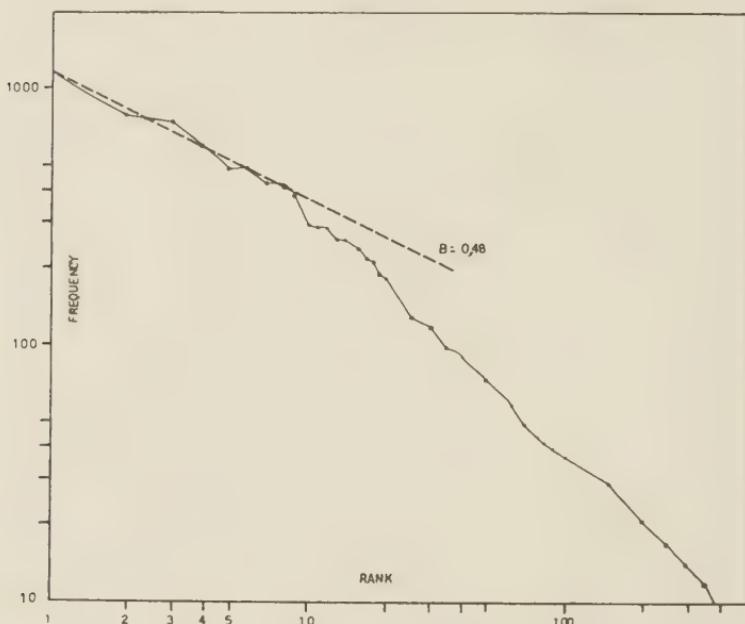


Fig. 5

The various examples of fig. 3 are represented in the left hand side of fig. 6 with an horizontal shift identical to the one discussed in passing from fig. 1 to fig. 2. The smoothed curves are still called A, B ... E, but the discrete steps have been omitted. It is apparent that all curves will become practically identical after correction for the truncation effect. This correction does not alter the slope of the linear part, and it is already obvious in fig. 3 that all distributions have practically the same slope. The common value seems to be 2,8 bits, which is the double of the value found for phonemes. The straight line in fig. 6 is the theoretical characteristic corresponding to  $\sigma = 2,8$  bits.

If one accepts the normal distribution as the general law for words, the fact that Mandelbrot's or Zipf's laws are often satisfactorily confirmed would simply result from the enormous extension of the vocabularies combined with the limitation of many statistics well below the mean rank : for  $m$  large,  $B$ , as given (41), is constant

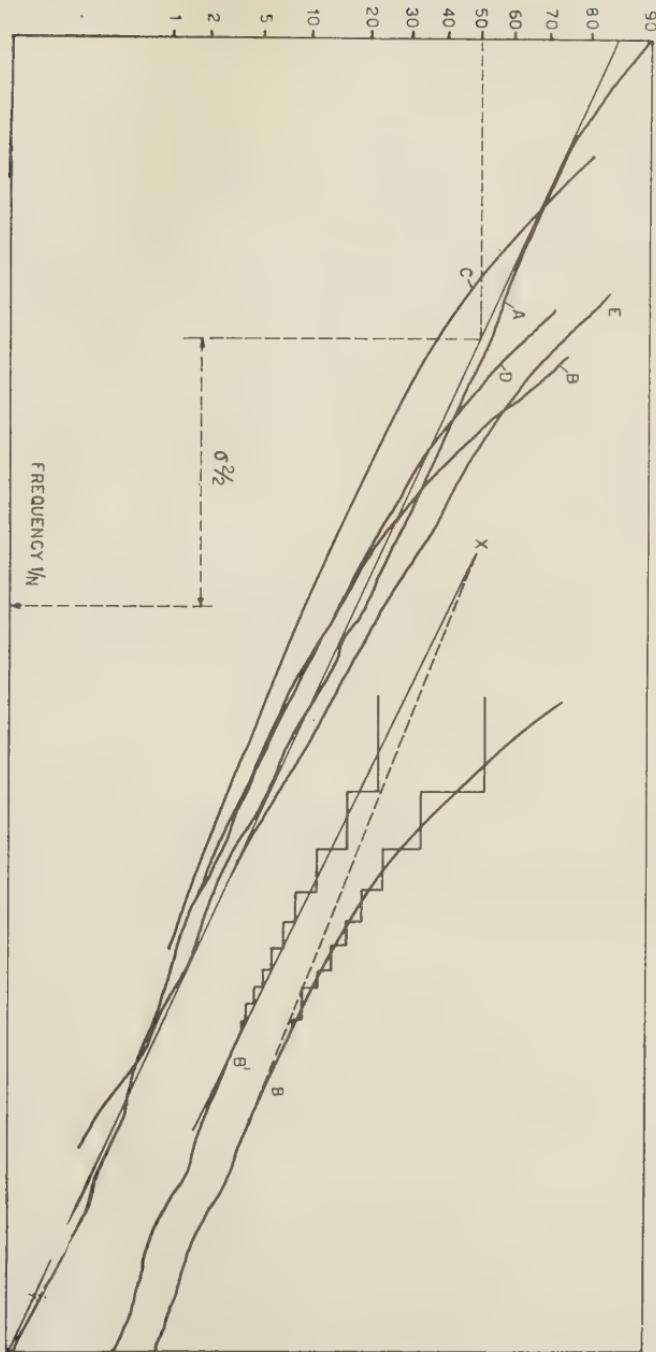


Fig. 6

for all moderate values of  $x_0$ . The necessity of a large vocabulary would also explain the insistence of several authors in counting all inflected forms as distinct.

A number of theoretical models have been proposed by Mandelbrot to account for his law (7). The model based on the weakest hypothesis assumes that texts are separated into words by a randomly distributed „space” symbol. No special theory is needed to explain a normal distribution, but it must be remarked that randomness has been shifted from the text to the vocabulary. For the high frequency tail of the distribution, where the saturation effect due to the finite extent of the vocabulary is still negligible, both explanations are equivalent, since the same stochastic model can be interpreted as yielding the text by a dilution of the dictionary, or the dictionary by a concentration of the text. But, for finite vocabularies a difference arises, because texts remain potentially infinite by hypothesis.

Finally, the constancy of the standard deviation for phoneme distributions on one hand, and for word distributions on the other, would suggest some common discrete substructure for both linguistic levels, but with a double number of degrees of freedom in the latter case.

#### ACKNOWLEDGEMENT

The author is grateful to W. Croes and P.G. Neumann who criticized the manuscript.

(7) The publication of B. MANDELBROT, « Linguistique statistique macroskopique » in *Logique, langage et théorie de l'information*, Presses Univ. Fr., Paris, 1957, gives a non-mathematical account of his theory, and a bibliography of the subject. See also the more recent contribution of B. MANDELBROT, in *Info and Control* vol. 2 pp. 90-99; april 1959.

# L'énergie potentielle complémentaire dans les problèmes dynamiques. - Un principe de variation des accélérations

PAR

B. FRAEIJS de VEUBEKE  
Professeur aux Universités de Liège et de Louvain

## SOMMAIRE

Tout comme le principe de variation des déplacements en élasticité, le principe de Hamilton peut être transformé en un principe canonique, autorisant des approximations indépendantes sur les déplacements et sur les forces de liaison.

On en déduit un principe dual à celui de Hamilton lorsque les équations d'équilibre dynamique sont exactement satisfaites. Pour des liaisons indépendantes du temps et une énergie cinétique fonction des seules vitesses ce principe dual prend la forme plus élégante d'un principe de variation des accélérations.

Ces idées sont d'abord exposées pour les systèmes à nombre fini de coordonnées lagrangiennes et appliquées, à titre d'exemple, à la recherche de valeurs approchées à la période d'oscillation d'un pendule. Elles sont ensuite étendues au cas de l'élastodynamique linéaire et appliquées à un cas simple de vibrations d'une poutre hyperstatique.

## 1. GÉNÉRALISATION DU PRINCIPE DE HAMILTON

Soient  $q_r (r = 1, 2 \dots n)$  des coordonnées généralisées permettant de décrire la configuration d'un système holonome à  $n$  degrés de liberté. Le principe de Hamilton (1)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ T(q_r, \dot{q}_r, t) - V(q_r) \right] dt = 0 \quad (1)$$

$$\delta q_r = 0 \text{ pour } t = t_1 \text{ et } t = t_2 \quad (2)$$

conduit aux équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial V}{\partial q_r} = 0 \quad (3)$$

qui gouvernent le mouvement du système.

Le principe de Hamilton est aussi un outil puissant pour obtenir des solutions approchées aux équations du mouvement. Dans ce but on peut y substituer à une ou plusieurs des fonctions inconnues  $q_r(t)$  des fonctions dépendant d'un certain nombre de paramètres à varier; les limites d'intégration étant choisies de façon à satisfaire les conditions (2).

Nous élargissons le champ des solutions approchées en permettant à l'énergie potentielle  $V$  du système d'être calculée dans une configuration qui ne coïncide pas nécessairement à chaque instant avec celle qui nous sert à calculer son énergie cinétique  $T$ . Dans ce but nous introduisons pour le calcul de  $V$   $n$  nouvelles coordonnées lagrangiennes  $h_r (r = 1, 2, \dots, n)$  indépendantes des  $q_r$ . Les  $n$  contraintes

$$h_r - q_r = 0 \quad (4)$$

sont incorporées au principe de Hamilton à l'aide de  $n$  multiplicateurs lagrangiens  $f_r$ . Le principe ainsi modifié s'écrit

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ T(q_r, \dot{q}_r, t) - V(h_r) + \sum_r f_r (h_r - q_r) \right] dt = 0 \quad (5)$$

La variation des  $q_r$  avec les conditions (2) donne

$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_r} - f_r = 0 \quad (6)$$

La variation des  $h_r$

$$-\frac{\partial V}{\partial h_r} + f_r = 0 \quad (7)$$

Tandis que la variation des  $f_r$  restitue les contraintes (4). Par élimination des  $f_r$  et des  $h_r$  on retrouve les équations (3) de Lagrange.

## 2. INTRODUCTION DE L'ÉNERGIE POTENTIELLE COMPLÉMENTAIRE

Les multiplicateurs  $f_r$  ayant été identifiés par les équations (7) nous substituons leur valeur dans le principe généralisé (5). Cette

substitution suggère l'introduction de l'énergie potentielle complémentaire  $\psi$  définie par la transformation de contact de Legendre

$$\psi(f_r) = \sum_r f_r h_r - V \quad (8)$$

Comme la notation l'indique il faut résoudre les équations (7) par rapport aux  $h_r$  afin de substituer au second membre de (8) les  $h_r$  au profit des  $f_r$ .

Eu égard aux équations (7) la définition de (8) entraîne les relations duales de (7)

$$h_r = \frac{\partial \psi}{\partial f_r} \quad (9)$$

Après remplacement des multiplicateurs le principe généralisé prend la forme canonique

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ T(q_r, \dot{q}_r, t) + \psi(f_r) - \sum_r f_r q_r \right] dt = 0 \quad (10)$$

Les équations d'Euler de ce principe variationnel sont : pour les variations  $\delta q_r$  toujours conditionnées par (2)

$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_r} = f_r \quad (11)$$

ce sont les équations de l'équilibre dynamique; pour les variations  $\delta f_r$

$$\frac{\partial \psi}{\partial f_r} = q_r \quad (12)$$

Rapprochées des équations (9) on voit qu'elles impliquent le respect des contraintes (4) et pour cette raison nous les appellerons les équations de compatibilité.

Le principe canonique permet l'introduction d'approximations non seulement sur les fonctions  $q_r(t)$  mais aussi et indépendamment sur les fonctions  $f_r(t)$ . Dans ce cas les équations d'équilibre et de compatibilité ne seront plus satisfaites exactement. En général les équations fournies par l'application du principe canonique demanderont que soient satisfaites un certain nombre de moyennes temporelles pondérées des équations (11) et (12) dans l'intervalle de temps considéré.

### 3. UN PRINCIPE DE VARIATION DES ACCÉLÉRATIONS

Quand on satisfait a priori aux équations de compatibilité (12) il revient évidemment au même d'appliquer le principe canonique ou le principe de Hamilton sous sa forme primitive. Quand on satisfait a priori aux équations (11) de l'équilibre dynamique, le principe canonique doit se réduire à un principe dual de celui de Hamilton, exactement comme dans la théorie de l'élasticité le principe de l'énergie complémentaire (ou de variation des tensions) est dual au principe de l'énergie totale (ou de variation des déplacements).

Ce principe dual ne prend cependant une forme élégante que dans le cas particulier important des systèmes à liaisons indépendantes du temps et à énergie cinétique fonction des seules vitesses.

Supposant les équations (11) satisfaites, commençons par substituer formellement dans (10) les  $f_r$  par leur valeur, ce qui transformera  $\psi$  en une fonction notée par

$$\psi(t, q_r, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)$$

Nous obtenons comme principe dual

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ T(q_r, \dot{q}_r, t) + \psi(t, q_r, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) - \sum_r q_r \frac{\delta T}{\delta q_r} + \sum_r q_r \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta T}{\delta \dot{q}_r} \right) \right] dt = 0$$

Il peut être quelque peu simplifié en décomposant l'énergie cinétique

$$T = T_0 + T_1 + T_2$$

dans ses parties respectivement homogènes de degré zéro, un et deux dans les vitesses généralisées  $\dot{q}_r$ . Par le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes on peut écrire

$$T = \sum \dot{q}_r \frac{\delta T}{\delta \dot{q}_r} - T_2 + T_0$$

Si cette nouvelle expression de  $T$  est substituée pour le premier terme et comme

$$\sum_r \dot{q}_r \frac{\delta T}{\delta \dot{q}_r} + \sum_r q_r \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta T}{\delta \dot{q}_r} \right) - \frac{d}{dt} \left( \sum_r q_r \frac{\delta T}{\delta \dot{q}_r} \right)$$

il vient après une intégration

$$\delta \left[ \sum_r q_r \frac{\delta T}{\delta \dot{q}_r} \right]_{t_1}^{t_2} + \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \psi + T_0 - T_2 - \sum_r q_r \frac{\delta T}{\delta q_r} \right] dt = 0 \quad (13)$$

Notons ici que les conditions (2) ne font pas disparaître complètement les termes aux limites.

Pour des liaisons indépendantes du temps on sait que l'énergie cinétique se réduit à  $T_2$  et le principe devient plus simplement

$$\delta \left[ \sum_r q_r \frac{\delta T}{\delta \dot{q}_r} \right]_{t_1}^{t_2} + \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \psi - T - \sum_r q_r \frac{\delta T}{\delta q_r} \right] dt = 0 \quad (14)$$

où  $\psi$  ne dépend plus explicitement du temps.

Enfin dans certains cas particuliers, mais toujours quand les oscillations autour d'une position d'équilibre sont petites,  $T$  ne dépend pas explicitement des  $q_r$  et on a

$$\delta \left[ \sum_r q_r \frac{\delta T}{\delta \dot{q}_r} \right]_{t_1}^{t_2} + \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \psi(\ddot{q}_r) - T(\dot{q}_r) \right] dt = 0 \quad (15)$$

En effet les  $f_r$  deviennent dans ce cas des fonctions linéaires des accélérations  $\ddot{q}_r$  :

$$f_r = - \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta T}{\delta \dot{q}_r} \right) = - \frac{d}{dt} \left( \sum_s a_{rs} \dot{q}_s \right) = - \sum_s a_{rs} \ddot{q}_s \quad (16)$$

en désignant par  $a_{rs}$  les constantes

$$a_{rs} = \frac{\delta^2 T}{\delta \dot{q}_r \delta \dot{q}_s} = a_{sr} \quad (17)$$

Le principe (15) est alors plus avantageusement interprété comme un principe de variation des accélérations. En effet par (16)

$$\delta \psi = \sum_r \frac{\delta \psi}{\delta f_r} \delta f_r = - \sum_r \sum_s \frac{\delta \psi}{\delta f_r} a_{rs} \delta \ddot{q}_s$$

et d'autre part

$$\delta T = \sum_s \frac{\delta T}{\delta \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s = \sum_s \sum_r a_{rs} \dot{q}_r \delta \dot{q}_s$$

Le principe (15) devient donc

$$\left[ \sum_s \delta q_s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} + \sum_s \sum_r a_{rs} q_r \delta \dot{q}_s \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_s \sum_r a_{rs} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial f_r} \delta \ddot{q}_s + \dot{q}_r \delta \dot{q}_s \right] dt = 0$$

En intégrant le dernier terme par parties il vient

$$\left[ \sum_s \delta q_s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_s \left( \sum_r a_{rs} \left( \frac{\partial \psi}{\partial f_r} - q_r \right) \right) \delta \ddot{q}_s \right] dt = 0$$

Les termes aux limites disparaissent en vertu de (2) et l'annulation des coefficients des variations sur les accélérations est équivalente aux équations de compatibilité (12), du fait que le déterminant

$$|a_{rs}| \neq 0$$

En effet, l'énergie cinétique étant une forme quadratique définie positive, ce déterminant est strictement positif. Une dernière simplification du principe (15) s'impose. Elle consiste à supprimer les termes aux limites et à le réduire au principe de variation des accélérations

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ T(\dot{q}_r) - \psi(\ddot{q}_r) \right] dt = 0 \quad (18)$$

Il suffit pour le justifier de remplacer les conditions (2) par les conditions aux limites sur les vitesses

$$\dot{q}_r = 0 \text{ pour } t = t_1 \text{ et } t = t_2 \quad (19)$$

Sous cette forme sa dualité avec le principe de Hamilton est formellement mieux dégagée.

#### 4. APPLICATION DU PRINCIPE GÉNÉRALISÉ AUX OSCILLATIONS PENDULAIRES DE GRANDE AMPLITUDE

Cette application à un problème dont la solution exacte est bien connue a l'avantage de permettre une comparaison numérique directe avec des solutions approchées, d'ailleurs plus compliquées que la solution exacte.

L'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la masse  $m$  suspendue à un fil de longueur  $r$  dans un champ uniforme de gravité d'accélération  $g$  sont respectivement

$$T = \frac{1}{2} mr^2 \dot{\theta}^2 \quad (20)$$

$$V = -mgr \cos \theta \quad (21)$$

où  $\theta$  est l'angle que fait le fil avec la verticale.

L'équation de Lagrange correspondante

$$mr(\ddot{r}\dot{\theta} + g \sin \theta) = 0 \quad (22)$$

a pour solution bien connue

$$t - t_{\theta=0} = \sqrt{\frac{r}{2g}} \int_0^\theta \frac{du}{\sqrt{\cos u - \cos \alpha}}$$

où  $\alpha$  désigne l'écart angulaire maximum. Pour  $\theta = \alpha$  cette expression donne le quart de la période d'oscillation  $T_\alpha$  qui, moyennant le changement de variable

$$\sin \frac{u}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \varphi$$

devient

$$T_\alpha = 4 \sqrt{\frac{r}{g}} K\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right) \quad (23)$$

où  $K(k)$  est l'intégrale elliptique complète de première espèce

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

Pour  $k$  tendant vers zéro en même temps que  $\alpha$  on trouve la formule classique de la période des petites oscillations

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}} \quad \left( K = \frac{\pi}{2} \right) \quad (24)$$

Utilisons directement le principe de Hamilton en formulant l'hypothèse que l'oscillation est harmonique

$$\theta = \alpha \sin \omega t \quad (25)$$

Nous considérons  $\omega$ , et donc la période, comme une donnée et nous chercherons l'amplitude  $\alpha$  approchée correspondante en

tenant la variation sur ce paramètre. Pour satisfaire aux conditions

$$\delta\theta = 0 \text{ pour } t = t_1 \text{ et } t = t_2$$

quel que soit  $\alpha$  nous prenons

$$\omega t_1 = 0 \quad \omega t_2 = \pi$$

Grâce à la formule suivante de la théorie des fonctions de Bessel

$$\int_0^\pi \cos(\alpha \sin \omega t) d(\omega t) = \pi J_0(\alpha) \quad (26)$$

le principe de Hamilton devient

$$\delta \left[ \frac{\pi}{4} mr^2 \alpha^2 \omega + \pi \frac{mgr}{\omega} J_0(\alpha) \right] = 0$$

Annulant le coefficient de la variation  $\delta\alpha$  il vient

$$\frac{1}{\omega^2} = - \frac{r}{2g} \frac{\alpha}{J_0'(\alpha)}$$

Ce résultat peut finalement être mis sous la forme

$$T_\alpha/T_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{2J_1(\alpha)}} \quad (27)$$

Par le développement en série de la fonction de Bessel on vérifie facilement que le second membre tend bien vers l'unité quand l'amplitude tend vers zéro. L'approximation à la période donnée par (27) ne commence à se détériorer que pour des amplitudes supérieures à 120°.

L'énergie complémentaire a ici pour expression

$$\psi(f) = mgr [\mu \arcsin \mu + \sqrt{1 - \mu^2}] \quad (28)$$

avec

$$\mu = \frac{f}{mgr}$$

Utilisons le principe de variation canonique (10) avec les approximations indépendantes

$$\theta = \alpha \sin \omega t \quad \mu = \lambda \sin \omega t \quad (29)$$

Les variations seront prises indépendamment sur  $\alpha$  et  $\lambda$  avec les limites d'intégrations précédentes. Toutes les intégrales à évaluer sont soit élémentaires soit réductibles à des intégrales elliptiques

complètes de première et seconde espèce de module  $\lambda$ . On trouve que la variation sur  $\alpha$  demande

$$\lambda = \frac{r}{g} \omega^2 \alpha \quad (30)$$

Ce résultat rapproché des hypothèses (29) permet de vérifier que l'équation d'équilibre dynamique

$$mr^2 \ddot{\theta} + f = 0$$

est satisfaite de façon exacte. L'approximation qui sera obtenue aura donc un caractère dual à la précédente. Ce sera l'équation de compatibilité

$$\theta = \text{arc sin } \mu$$

qui ne sera satisfaite qu'en moyenne. La variation sur  $\lambda$  nous livre cette condition de compatibilité en moyenne sous la forme

$$\alpha = \frac{4}{\pi \lambda} [E(\lambda) - (1 - \lambda^2) K(\lambda)] \quad (31)$$

où  $E(\lambda)$  est l'intégrale elliptique complète de seconde espèce.

Ce résultat combiné avec la forme équivalente de (30)

$$T_\alpha/T_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda}} \quad (32)$$

constitue une représentation paramétrique de la période réduite en fonction de l'amplitude. Comme

$$\frac{E(\lambda) - (1 - \lambda^2) K(\lambda)}{\lambda^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}}$$

il se vérifie facilement que la période tend vers celle des petites oscillations quand le paramètre  $\lambda$  tend vers zéro. Par contre quand le paramètre tend vers sa limite supérieure, qui est l'unité, l'amplitude et la période réduite tendent vers des limites respectives

$$\lim \alpha = \frac{4}{\pi} \quad \lim T_\alpha/T_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

Cette solution approchée n'autorise donc pas d'amplitude angulaire supérieure à environ  $72,95^\circ$ . Le tableau suivant donne quelques valeurs numériques comparatives.

Amplitude	Période réduite		
	par (27)	par (32)	exacte
0°	1	1	1
30°	1,0174	1,0174	1,0174
60°	1,0727	1,0778	1,0732
72°95	1,1107	1,1284	1,1119
90°	1,1772		1,1804
120°	1,3567		1,3729
150°	1,6764		1,7622
180°	2,3493		

Il est intéressant d'observer que les deux types d'approximation encadrent la valeur exacte. Ceci doit cependant être attribué au type de non-linéarité du problème, car pour les problèmes d'oscillations linéaires on sait que les deux approximations se font par défaut.

## 5. APPLICATION A LA THÉORIE DES VIBRATIONS LINÉAIRES DES MILIEUX CONTINUS

Si les fonctions

$$u_i(x_r, t) \quad \begin{matrix} i = 1, 2, 3 \\ r = 1, 2, 3 \end{matrix}$$

décrivent le champ des déplacements d'un corps élastique par rapport à un repère cartésien, l'énergie cinétique, peut s'écrire

$$T = \frac{1}{2} \int_{\text{Vol.}} \rho \left( \sum_i \dot{u}_i^2 \right) d\tau \quad (33)$$

L'énergie potentielle due à la déformation élastique

$$V = \int_{\text{Vol.}} W(\varepsilon_{ij}) d\tau \quad (34)$$

est l'intégrale de la densité d'énergie  $W$ , une fonction des six grandeurs

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \\ \varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad i \neq j \end{array} \right. \quad (35)$$

qui caractérisent la déformation quand les rotations matérielles sont suffisamment petites. Dans cette définition des  $\varepsilon_{ij}$  l'omission du facteur  $\frac{1}{2}$  est faite à dessein pour simplifier l'écriture des relations énergétiques. Le tenseur des déformations est constitué par le tableau à deux indices de nos  $\varepsilon_{ii}$  et de la moitié de nos  $\varepsilon_{ij}$ . Ces grandeurs sont aussi supposées être petites et dans ce cas la masse volumique  $\rho$  peut être considérée comme n'étant fonction que des coordonnées initiales  $x_r$ . Le volume du corps est délimité par une surface  $S$ , sur une portion  $S_1$  de laquelle les déplacements seront supposés devoir rester nuls

$$u_i = 0 \text{ sur } S_1 \quad (36)$$

(l'extension aux cas de déplacements imposés non nuls est triviale). L'application du principe de Hamilton (1) avec les conditions

$$\delta u_i = 0 \text{ pour } t = t_1 \text{ et } t = t_2 \quad (37)$$

fournit les conditions d'équilibre en volume

$$-\rho u_i \ddot{u}_i + \sum_r \frac{\partial}{\partial x_r} \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ir}} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (38)$$

et des conditions d'équilibre sur la portion de surface  $S_2$  complémentaire de  $S_1$

$$\sum_r l_r \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ir}} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (39)$$

où les  $l_r$  sont les cosinus directeurs de la normale extérieure.

En vue d'obtenir un principe canonique on introduit six grandeurs  $\gamma_{ij}$ , indépendantes des  $\varepsilon_{ij}$ , à l'aide desquelles on calcule la densité d'énergie de déformation  $W(\gamma_{ij})$ . Les conditions

$$\gamma_{ij} - \varepsilon_{ij} = 0$$

sont considérées comme des contraintes. On les incorpore automatiquement dans le principe en lui ajoutant le terme

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\text{vol.}} \left[ \sum_{i \geq j} \sigma_{ij} (\gamma_{ij} - \varepsilon_{ij}) \right] d\tau dt$$

comportant six multiplicateurs lagrangiens  $\sigma_{ij}$ . Le procédé est formellement identique à celui de l'élasticité (7).

Les variations sur les  $\gamma_{ij}$  permettent d'identifier les multiplicateurs; on trouve

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \gamma_{ij}} \quad (40)$$

Ce sont donc les tensions correspondant aux déformations  $\gamma_{ij}$ . Introduisant la densité d'énergie complémentaire

$$\Phi(\sigma_{pq}) = \sum_{i \geq j} \sigma_{ij} \gamma_{ij} - \mathbf{W} \quad (41)$$

qui possède les propriétés duales de (40)

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial \Phi(\sigma_{pq})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (42)$$

et l'énergie complémentaire elle-même

$$\psi = \int_{\text{vol.}} \Phi(\sigma_{pq}) d\tau \quad (43)$$

apparaît le principe canonique équivalent à (10)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \mathbf{T} + \psi - \int_{\text{vol.}} \left( \sum_{j \geq i} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \right) d\tau \right] dt = 0 \quad (44)$$

Dans ce principe les grandeurs  $u_i$  et  $\sigma_{ij}$  peuvent être variées indépendamment.

Les variations sur les  $u_i$  donnent les équations d'équilibre dynamique

$$\left. \begin{aligned} -\rho \ddot{u}_i + \sum_r \frac{\partial \sigma_{ir}}{\partial x_r} &= 0 \\ \sum_r l_r \sigma_{ir} &= 0 \text{ sur } S_2 \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, 3) \quad (45)$$

Les variations sur les  $\sigma_{ij}$  des conditions de compatibilité

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij} \quad (46)$$

manifestement équivalentes aux contraintes en vertu de (42).

Passons maintenant au principe dual de celui de Hamilton. Pour satisfaire a priori aux équations d'équilibre (45) nous décomposons le champ des tensions en un champ  $\sigma_{pq}^0$  qui en est une solution particulière et un champ  $\sigma_{pq}'$ , qui en est la solution générale

sans les termes d'inertie. Autrement dit  $\sigma'_{pq}$  est un champ général d'équilibre statique sans forces extérieures. Dans la plupart des problèmes techniques, où la distribution des tensions est schématisée de telle façon que l'intégration des équations d'équilibre se réduit à des quadratures le long de fibres moyennes, le champ  $\sigma'_{pq}$  ne dépendra en fait que d'un certain nombre d'inconnues hyperstatiques, liées à la topologie des circuits formés par ces fibres.

Le champ particulier choisi pour équilibrer les forces d'inertie s'exprimera en fonction des accélérations  $\ddot{u}_i$ ; nous écrirons en conséquence pour symboliser la densité d'énergie complémentaire l'expression

$$\Phi(\ddot{u}_i, \sigma'_{pq})$$

Examinons maintenant comment modifier (44) en tenant compte de (45). Intégrons par parties le dernier terme de (44)

$$\int_{\text{Vol.}} \left( \sum_{j \geq i} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \right) d\tau = \int_{\frac{S+S}{2}} \sum_i \left( \sum_r l_r \sigma_{ir} \right) u_i dS - \int_{\text{Vol.}} \sum_i \left( \sum_r \frac{\partial \sigma_{ir}}{\partial x_r} \right) u_i d\tau \quad (47)$$

Remplaçons  $T$  par

$$T = \int_{\text{Vol.}} \rho \left( \sum_i \dot{u}_i^2 \right) d\tau - T \quad (48)$$

Substituons dans (44) et intégrons le premier terme par parties

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\text{Vol.}} \rho \left( \sum_i \dot{u}_i^2 \right) d\tau dt = \left[ \int_{\text{Vol.}} \rho \left( \sum_i \dot{u}_i u_i \right) d\tau \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\text{Vol.}} \rho \left( \sum_i \ddot{u}_i u_i \right) d\tau dt \quad (49)$$

Le résultat de ces opérations permet de simplifier quelques termes à l'aide des équations d'équilibre (45) et de (36), le principe dual émerge sous la forme

$$\delta \left[ \int_{\text{Vol.}} \rho \left( \sum_i \dot{u}_i u_i \right) d\tau \right]_{t_1}^{t_2} - \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ T - \int_{\text{Vol.}} \Phi(\ddot{u}_i, \sigma_{pq}) d\tau \right] dt = 0 \quad (50)$$

En fait il se scinde en une partie dynamique et une partie qui relève

de la statique. La partie dynamique consiste à prendre les variations sur les accélérations  $\ddot{u}_i$ ; ceci fait disparaître dans les termes aux limites les seules variations qui subsistaient après l'application des conditions (57), tandis que les coefficients des  $\delta\ddot{u}_i$  sous le signe intégral fournissent les conditions de compatibilité

$$\rho u_i + \frac{\partial \Phi}{\partial \ddot{u}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (51)$$

La partie statique du principe s'identifie avec le principe de l'énergie complémentaire en élasticité. Il revient en effet au même en prenant dans (50) les variations sur le champ  $\sigma'_{pq}$  d'écrire

$$\delta' \int_{\text{Vol.}} \Phi(\ddot{u}_i, \sigma'_{pq}) d\tau = 0 \quad (52)$$

le symbole  $\delta'$  indiquant que seul le champ  $\sigma'_{pq}$  est à varier.

Dans le principe complet (50) on a vu que l'intégration par parties sur la variation de l'énergie cinétique, nécessaire pour faire apparaître les  $\delta\ddot{u}_i$  sous le signe intégral, avait en même temps pour effet d'éliminer les variations aux limites. On obtient finalement le même résultat en laissant tomber les termes aux limites de (50) à condition de substituer aux conditions (57) des conditions analogues sur les variations aux limites des vitesses :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{\text{Vol.}} \left[ \frac{1}{2} \rho \sum_i \dot{u}_i^2 - \Phi(\ddot{u}_i, \sigma'_{pq}) \right] d\tau dt = 0 \quad (53)$$

$$\delta \dot{u}_i = 0 \quad \text{pour } t = t_1 \text{ et } t = t_2 \quad (54)$$

On obtient ainsi l'analogie complète avec la formulation (18) et (19).

## 9. VIBRATIONS TRANSVERSALES D'UNE POUTRE HYPERSTATIQUE

La portée des principes qui viennent d'être élaborés ne peut être dégagée que sur un exemple concret. Celui qui va être traité est un des plus simples qui fasse cependant intervenir toutes les particularités intéressantes.

La poutre est de raideur de flexion  $EI$  et de masse répartie  $m$  constantes. Elle est encastrée en  $x = 0$  et articulée en  $x = l$ . Le déplacement transversal est représenté de façon approchée par la loi

$$v(\xi, t) = A(t) \xi^2 (1 - \xi) \quad \xi = x/l \quad (55)$$

et vérifie les conditions cinématiques (analogues de (36)) du problème

$$v(0, t) = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial \xi}(0, t) = 0 \quad v(1, t) = 0 \quad (56)$$

Le calcul de l'énergie cinétique donne

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{ml}{2} \dot{A}^2 \frac{1}{105} \quad (57)$$

En calculant l'énergie de déformation par flexion au moyen des dérivées du déplacement on trouve

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{2EI}{l^3} A^2 \quad (58)$$

Ces deux expressions, introduites dans le principe de Hamilton

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0$$

fournissent par variation de la fonction inconnue  $A(t)$  avec conditions aux limites  $\delta A(t_1) = \delta A(t_2) = 0$  l'équation différentielle d'une oscillation harmonique

$$\frac{ml}{105} \ddot{A} + \frac{4EI}{l^3} A = 0 \quad (59)$$

Le carré de la fréquence circulaire du mode fondamental ainsi estimée a pour valeur

$$\omega^2 = 420 \frac{EI}{ml^4} \quad (60)$$

Elle est en fait considérablement surestimée.

Passons à l'application du principe canonique (44) ici représenté sous la forme

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ T + \psi - \int_0^l M \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx \right] dt = 0 \quad (61)$$

avec

$$\psi = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx \quad (62)$$

Il faut se donner une loi indépendante de distribution du moment

fléchissant; nous essayons la loi à deux fonctions inconnues

$$M = B(t)(1 - \xi) + C(t)(1 - \xi)^2 \quad (63)$$

qui satisfait à l'unique condition aux limites sur les tensions (analogue des conditions d'équilibre sur  $S_2$ )

$$M(1, t) = 0 \quad (64)$$

Notons d'ailleurs que le principe canonique n'exige nullement que cette condition soit remplie a priori, comme nous le faisons ici avec l'intention d'améliorer l'approximation. Après évaluation des intégrales nous obtenons l'expression suivante à varier

$$8 \int_{-1}^2 \left[ \frac{ml}{210} \dot{A}^2 + \frac{B^2 l}{6EI} + \frac{BCl}{4EI} + \frac{C^2 l}{10EI} - \frac{AC}{6l} \right] dt = 0 \quad (65)$$

Les variations indépendantes sur  $A(t)$ ,  $B(t)$  et  $C(t)$  livrent

$$\left. \begin{array}{l} \frac{ml}{105} \ddot{A} + \frac{1}{6l} C = 0 \\ 4B + 3C = 0 \\ 5B + 4C = \frac{10}{3} \frac{EI}{l^2} A \end{array} \right\} \quad (66)$$

Après élimination de  $B$  et  $C$ , il vient

$$\ddot{A} + \omega^2 A = 0 \quad (67)$$

avec cette fois l'estimation

$$\omega^2 \frac{ml^4}{EI} = \frac{20 \times 35}{3} = 233 + \frac{1}{3} \quad (68)$$

Appliquons enfin le principe de variation des accélérations. Dans ce but nous nous servons encore de (55) pour le calcul des accélérations transversales mais nous intégrons exactement l'équation d'équilibre dynamique

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -m\ddot{v} = -m\ddot{A} \xi^2 (1 - \xi) \quad (69)$$

La condition aux limites (64) est ici obligatoirement incorporée; elle ne fixe qu'une des constantes d'intégration (ce sont en réalité des fonctions du temps). L'autre subsiste comme une inconnue hyperstatique: c'est l'analogue de la partie  $\sigma'_{py}$  du champ des

tensions. On trouve après les deux quadratures

$$M = -ml^2 \ddot{A} \frac{1}{60} (5\xi^4 - 3\xi^5 - 2) + B(1 - \xi) \quad (70)$$

Après calcul l'énergie complémentaire (62) devient

$$\psi = \frac{257}{60 \times 60 \times 99} \frac{m^2 l^5}{2EI} \ddot{A}^2 + \frac{19}{60 \times 21} \frac{ml^3}{EI} B \ddot{A} + \frac{1}{3} \frac{l}{2EI} B^2 \quad (71)$$

Substituant les expressions (57) et (71) dans le principe de variation des accélérations

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \psi) dt = 0 \quad (72)$$

avec annulation des variations aux limites

$$\delta \dot{A}(t_1) = 0 \quad \delta \dot{A}(t_2) = 0$$

nous sommes conduits aux équations d'Euler suivantes :

$$\frac{ml}{105} A + \frac{m^2 l^5}{EI} \frac{257}{60 \times 60 \times 99} \ddot{A} + \frac{ml^3}{EI} \frac{19}{60 \times 21} B = 0 \quad (73)$$

résultant de l'annulation du coefficient de  $\ddot{\delta A}$  et

$$ml^2 \frac{19}{60 \times 21} \ddot{A} + \frac{1}{3} B = 0 \quad (74)$$

résultant de l'annulation du coefficient de  $\delta B$ .

Après élimination de  $B$  on retrouve (67) avec la nouvelle estimation

$$\omega^2 \frac{ml^4}{EI} = \frac{18.860.688}{77.112} = 244,588 \quad (75)$$

Ces résultats se retrouvent encore en faisant d'emblée l'hypothèse d'une oscillation harmonique des variables et en partant alors du principe équivalent

$$\delta T_{\max} = \delta V_{\max} \quad (76)$$

où les variations portent maintenant sur les amplitudes. L'utilisation du principe dual

$$\delta T_{\max} = \delta \psi_{\max} \quad (77)$$

basé sur une analogie avec l'élasticité a été suggérée par E. Reissner<sup>(3)</sup>

et appliquée à des problèmes de vibration par P. Libby et R.C. Sauer (4). Antérieurement R. Grammel (2) avait proposé cette méthode sans la rapprocher de la notion d'énergie complémentaire.

Il est bien connu (5) que (76) donne une borne supérieure à la fréquence du mode fondamental. On peut aussi démontrer (2-6) que, partant des mêmes hypothèses sur les déplacements, (77) donne une borne supérieure plus exacte. Ceci n'est pas étonnant si l'on observe que l'énergie potentielle est calculée par intégration sur les déplacements au lieu de l'être par dérivation. Quant au principe canonique, l'approximation qu'il fournit est malheureusement indéterminée, étant tantôt une valeur par excès, tantôt par défaut.

La forme que nous avons donnée à ces principes dynamiques a l'avantage d'étendre leur champ d'application à des cas non-linéaires. Ils sont aussi susceptibles d'être étendus aux systèmes attaqués par des forces extérieures, fonctions arbitraires du temps.

#### REFERENCES

- (1) E.T. WHITTAKER, *Analytical Dynamics*, Dover Pub. N.Y. 1944.
- (2) R. GRAMMEL, Ein neues Verfahren zur Lösung technischer Eigenwertprobleme. *Ing. Archiv* 10 p. 35 1939.
- (3) E. REISSNER, Complementary energy procedure for flutter calculations. *J.A.S.R.F.* 16-5, p. 316, May 1949.
- (4) P.A. LIBBY and R.C. SAUER, Comparison of the Rayleigh-Ritz and complementary energy methods in vibration analysis, *J.A.S.R.F.* 16-11, p. 700, Nov. 1949.
- (5) Lord RAYLEIGH, *The Theory of Sound*, Dover Pub. N.Y. 1945.
- (6) A.I. van de VOOREN and J.H. GREIDANUS, Complementary energy methods in vibration analysis. *J.A.S.R.F.* 17-7 p. 454, July 1950.
- (7) B. FRAEIJIS de VEUBEKE, Diffusion des inconnues hyperstatiques dans les voilures à longerons couplés. *Bulletin du S. Techn. de l'Aéron.* 24, 1951.

## La lentille épaisse convergente

### I. Représentation graphique et chromatisme des longueurs focales

PAR

A. BIOT

#### SOMMAIRE

On montre d'abord que l'on peut représenter l'ensemble des lentilles de longueur focale égale à l'unité et d'indice de réfraction  $n$  par un faisceau de droites dans le plan  $(R_1, e)$ . Déterminant alors le chromatisme  $\alpha = v\delta F$  de la longueur focale de ces lentilles, on remarque qu'à toute valeur de  $\alpha$  correspond une branche d'hyperbole dans le même plan  $(R_1, e)$ . Les résultats obtenus sont représentés graphiquement en supposant  $n = 1,5$ . Les notations employées sont les notations classiques habituelles.

La lentille épaisse est, paradoxalement, l'un des systèmes optiques les moins étudiés. Nous nous proposons d'en considérer quelques propriétés.

#### a. REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

1. Appelons  $F$  la longueur focale de la lentille,  $\phi$  l'inverse de cette longueur,  $R_1$  et  $R_2$  les rayons de courbure dans l'ordre de traversée par la lumière,  $e$  l'épaisseur,  $n$  l'indice de réfraction.

On sait que l'on a

$$\frac{1}{F} = \Phi = \frac{n(n-1)(R_2 - R_1) + e(n-1)^2}{nR_1R_2} \quad (1)$$

Posons  $F = \phi = 1$ . Une des surfaces au moins de la lentille est convergente. Nous pouvons supposer que c'est la première. Alors,  $R_1 > 0$ .

La relation (1) peut s'écrire, si  $F = 1$

$$e(n-1)^2 - R_1[nR_2 + n(n-1)] = -n(n-1)R_2 \quad (2)$$

Dans le plan  $(R_1, e)$  cette relation représente une droite pour toute valeur donnée de  $R_2$ ,  $n$  étant constant. Comme elle est satisfait identiquement pour  $R_1 = n - 1$ ,  $e = n$ , elle représente un

faisceau de droites passant par le point A qui a ces coordonnées, (fig. 1, dessinée pour  $n = 1,5$ ).

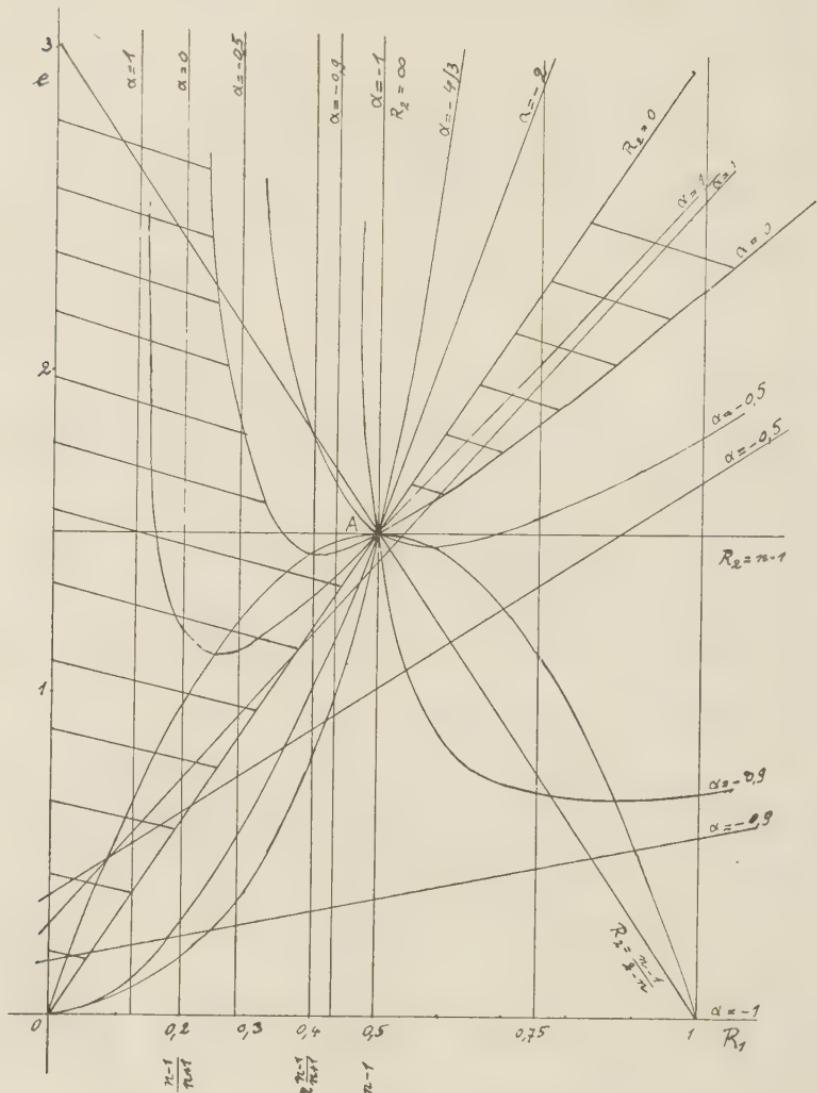


Fig. 1

2. Recherchons les intersections des droites du faisceau avec l'axe des  $R_1$ . (2) montre que la droite qui passe par l'origine correspond à  $R_2 = 0$ . Si  $R_2$  augmente jusque  $+\infty$ ,  $R_1$  augmente

jusque  $n - 1$ ; la droite correspondante est parallèle à l'axe des  $e$ . Au-delà de cette droite  $R_2$  part de  $-\infty$  et diminue en valeur absolue jusque  $R_2 = -(n-1)/(2-n)$  pour  $R_1 = 1$ . A  $R_1 = \infty$  correspond  $R_2 = -(n-1)$ , et la droite correspondante est parallèle à l'axe des  $R_1$ . Entre cette dernière droite et la droite  $e = nR_1/(n-1)$ ,  $R_2$  passe de  $-(n-1)$  à 0.

3. L'abscisse focale image  $x'_F$ , comptée à partir de la deuxième surface vaut

$$x'_F = 1 - e(n-1)/nR_1 \quad (3)$$

Cette quantité est  $> 0$  — c'est-à-dire que  $F'$  se trouve au-delà de la lentille — tant que  $e(n-1)/nR_1 < 1$  (avec  $e$  et  $R_1 > 0$ ) ou  $e < nR_1/(n-1)$ , c'est-à-dire pour tous les points du quadrant correspondant aux valeurs positives de  $R_1$  et  $e$  situés sous la droite  $e = nR_1(n-1)$  qui correspond à  $R_2 = 0$ .

L'abscisse focale objet  $x_F$  vaut

$$x_F = -[1 + e(n-1)/nR_2] \quad (4)$$

Mais (2) donne, pour  $R_2$

$$R_2 = \frac{(n-1)[e(n-1) - nR_1]}{n[R_1 - (n-1)]} \quad (5)$$

d'où

$$x_F = -\frac{R_1(e-n)}{(n-1)\left(e - \frac{nR_1}{n-1}\right)}$$

$R_1$  est  $> 0$ ; le numérateur est positif au-dessus de l'horizontale  $e = n$ . Le dénominateur est  $> 0$  au dessus de la droite  $e = nR_1/(n-1)$ . Ces deux droites partagent le quadrant utile du plan en 4 régions en lesquelles  $x_F$  est  $>$  ou  $< 0$  et que l'on trouve facilement. Notons qu'en vertu des conventions de signe (les conventions habituelles) le foyer objet se trouve en-dehors de la lentille pour  $x_F < 0$  et inversement.

4. La „Null-Linse” „paraxiale” ( $R_1 = R_2$ ) est représentée par la parabole  $e = R_1^2 n/(n-1)^2$ .

## b. CHROMATISME DES LONGUEURS FOCALES

5. Si l'on différentie la relation (1), on trouve facilement

$$\delta F = -\frac{\delta\phi}{\phi^2} = -\left[\phi + e \frac{(n-1)^2}{n^2 R_1 R_2}\right] \frac{\delta n}{n-1} \quad . \quad (6)$$

Faisons  $F = 1$ , remplaçons dans (6)  $R_2$  par sa valeur (5) et  $\delta n/(n - 1)$  par  $1/\nu$ . On trouve, en posant  $\nu\delta F = \alpha$

$$\alpha = \nu\delta F = \frac{n^2 R_1^2 - (n^2 - 1)R_1 + e(n - 1)^2}{nR_1[e(n - 1) - nR_1]} \quad (7)$$

6. *Discussion.* Donnons à  $\alpha$  une valeur quelconque et considérons les courbes alors représentées par (7). On vérifie que ce sont des hyperboles dont les deux branches ou l'une des branches passent par l'origine et par le point  $R_1 = n - 1$ ,  $e = n$  que nous avons considéré au n° 1.

La relation (7) peut s'écrire

$$e = \frac{n^2 R_1^2 (1 + \alpha)}{(n - 1) \{ R_1 [n(1 + \alpha) + 1] - (n - 1) \}} \quad (8)$$

On voit que l'une des asymptotes est représentée par

$$R_1 = (n - 1) / [n(1 + \alpha) + 1] \quad (9)$$

Nous l'appellerons la première asymptote.

Pour rechercher l'autre, nous emploierons la méthode classique. Le coefficient angulaire  $c$  de cette droite est donné par  $c = \lim e/R_1$  qui donne ici

$$c = \frac{n^2(1 + \alpha)}{(n - 1)[n(1 + \alpha) + 1]} \quad (10)$$

Par ailleurs on trouve l'ordonnée à l'origine  $e_0$  par l'expression  $e_0 = \lim (e - cR_1)$ , d'où

$$e_0 = \frac{n^2(1 + \alpha)}{[n(1 + \alpha) + 1]^2} \quad (11)$$

L'équation de la deuxième asymptote est

$$e - \frac{n^2(1 + \alpha)}{[n(1 + \alpha) + 1]^2} = R_1 \frac{n^2(1 + \alpha)}{(n - 1)[n(1 + \alpha) + 1]} \quad (12)$$

On voit que, pour  $\alpha = -1$  la première asymptote est  $R_1 = n - 1$ , la seconde étant définie par  $c = e_0 = 0$  (axe des  $R_1$ ). D'un autre côté, pour  $\alpha = \infty$ , les asymptotes sont définies par  $R_1 = 0$  et  $c = n/(n - 1)$ ,  $e_0 = 0$  (droite 0 A). Dans les deux cas il y a dégénérescence.

La relation (9) montre que l'abscisse de la première asymptote devient infinie pour  $\alpha = -(n + 1)/n$ . Pour cette valeur  $\alpha$  on a  $e = nR_1^2/(n - 1)^2$ . Cette équation représente une parabole dont

l'axe des  $e$  est l'axe principal, concave vers le haut et dont l'origine est le sommet. Pour  $n = 3/2$ , on a  $\alpha = -(n+1)/n = -5/3$  et l'on peut établir le tableau suivant

$R_1$	1	0,75	0,6	0,5	0,4	0,2
$e$	6	3,37	2,16	1,50	0,96	0,24

L'abscisse de la première asymptote est plus grande que zéro pour  $\alpha > -(n+1)/n$  et plus petite que zéro pour  $\alpha < -(n+1)/n$ .

D'un autre côté, (10) montre que si l'on a  $-1 > \alpha > 1 - 1/n$ , on a aussi  $c < 0$  et inversement. Dans cet intervalle de valeurs de  $\alpha$  on a également  $e_0 < 0$ . Comme la branche de courbe utile passe par le point A, on voit que pour des valeurs de  $\alpha$  ci-dessus définies la partie utile de la première asymptote se trouve à droite de la deuxième. Pour des valeurs de  $\alpha$  en dehors de l'intervalle elle se trouve à gauche.

7. *Discussion (suite).* Recherchons les maxima et minima des hyperboles. Ils sont définis par la relation  $\delta e / \delta R_1 = 0$ .

On trouve, comme coordonnées des points cherchés

$$R_1 = \frac{2(n+1)}{n(1+\alpha)+1} \quad R_1 = 0 \quad (13)$$

$$e = \frac{4n^2(1+\alpha)}{[n(1+\alpha)+1]^2} \quad e = 0 \quad (14)$$

Le lieu de ces points s'obtient en éliminant  $\alpha$  entre (13) et (14)

$$e = \frac{nR_1[2(n-1)-R_1]}{(n-1)^2} \quad (15)$$

C'est une parabole qui passe par l'origine et par les points  $R_1 = 2(n-1)$ ,  $e = 0$  et  $R_1 = n-1$ ,  $e = n$  (point A). Elle est symétrique par rapport à la droite  $R_1 = n-1$ .

Reprendons les deux systèmes de coordonnées (13) et (14). Tant que  $\alpha > -1$ , les points définis par le premier système se trouvent au-dessus de ceux qui sont définis par le second système, pour lequel  $e = 0$ . Ils correspondent donc à des minima sur la courbe. Si l'on a  $\alpha < -1$  la valeur  $e = 0$  se trouve au-dessus de l'autre : dans cet intervalle, toutes les branches utiles des hyperboles passent par l'origine qui est leur minimum commun. Nous avons signalé déjà les cas de dégénérescence.

8. *Discussion (suite).* Remarquons ici que l'équation (7)

pouvant s'écrire sous la forme  $f_1(R_1, e) + \alpha f_2(R_1, e) = 0$ , le faisceau d'hyperboles ne possède pas d'enveloppe.

Reprenons l'équation (7). Les racines du numérateur sont

$$R_1 = \frac{e(n-1) \pm \sqrt{e[e(n+1)^2 - 4n^2]}}{2n^2} (n-1)$$

Elles sont imaginaires ( $e > 0$ ) tant que l'on a  $e < \frac{4n^2}{(n+1)^2}$  qui correspond au minimum de la formule (14) pour  $\alpha = 0$  (chromatisme des longueurs focales). Si l'on a  $e > \frac{4n^2}{(n+1)^2}$ , les racines sont réelles et toutes deux positives. Le numérateur de (7) est donc  $> 0$  à l'extérieur de l'hyperbole qui correspond à  $\alpha = 0$ . Le dénominateur de l'expression (7) est positif si l'on a  $e > nR_1/(n-1)$ . Cette droite coupe l'hyperbole au point A. En ce point la valeur de  $\alpha$  est indéterminée car elle prend d'après (7) la forme 0/0. Sa vraie valeur est représentée par la limite du rapport des différentielles des deux termes, c'est-à-dire par

$$\lim_{\substack{[2n^2 R_1 - e(n-1)] \delta R_1 + [(n-1)^2 - R_1(n^2-1)] \delta e \\ [n(n-1) e - 2n^2 R_1] \delta R_1 + n(n-1) R_1 \delta e}}$$

dans laquelle on doit faire  $R_1 = n-1$  et  $e = n$ , c'est-à-dire par

$$\lim \left[ -\frac{(n-1)\delta R_1 - (n-1)\delta e}{n\delta R_1 - (n-1)\delta e} \right] = -1 + \frac{1}{n - (n-1)\delta e/\delta R_1}$$

Cette expression peut prendre toutes les valeurs entre  $-\infty$  et  $+\infty$ . Cela provient de ce que, au point A,  $R_2$  est indéterminé : le foyer de la première surface se trouve sur la seconde.

Nous avons représenté graphiquement, sur la fig. I, la discussion qui précède en supposant  $n = 1.5$ . On voit facilement que les zones hachurées correspondent à  $\alpha > 0$ , les autres à  $\alpha < 0$ .

(Voir, pour les résultats numériques, les n°s 10, 11 et 12).

9. *Cas où  $\alpha = 0$ .* Ce cas important doit être traité à part. La relation (6) donne

$$1 + \frac{e(n-1)^2}{n^2 R_1 R_2} = 0 \quad \dots \quad R_1 R_2 = -e \frac{(n-1)^2}{n^2} \quad (16)$$

Comme on a  $e > 0$ , il résulte de (16) que  $R_1$  et  $R_2$  sont de signes opposés : les surfaces sont convergentes.

Par ailleurs, en introduisant (16) dans (2), il vient

$$R_2 - R_1 = -e \frac{n^2 - 1}{n^2}$$

On peut donc écrire

$$e = -R_1 R_2 n^2 / (n - 1)^2 = - (R_2 - R_1) n^2 / (n^2 - 1)$$

ce qui montre que  $R_2 - R_1$  est  $< 0$  et donne

$$R_2 = - \frac{R_1(n-1)}{R_1(n+1) - (n-1)} \quad (17)$$

et

$$e = \frac{n^2 R_1^2}{(n-1) [R_1(n-1) - (n-1)]} \quad (18)$$

Par ailleurs, nous savons que

$$e_{\min} = \frac{4n^2}{(n+1)^2}$$

qui correspond à

$$R_1 = \frac{2(n-1)}{n+1} \quad \dots \quad R_2 = - \frac{2(n-1)}{n+1}$$

ce qui montre qu'au minimum la lentille est équiconvexe.

#### 10. Cas où $\alpha = 0$ , valeurs numériques

$n = 4/3$	$R_1$	$-R_2$	$e$	$n = 1,5$	$R_1$	$-R_2$	$e$	$n = 2$	$R_1$	$R_2$	$e$
1	0,167	2,667		1	0,25	2,25		1	0,5	2	
0,75	0,176	2,118		0,75	0,2727	1,8409		0,75	0,6	1,8	
0,50	0,20	1,6		0,50	0,333	1,5		min.	0,667	0,667	1,778
1/3	0,25	1,333		min.	0,40	0,40	1,44		0,50	1	2
min.	2/7	2/7	1,306		0,30	0,60	1,62		0,40	2	3,2
1/5	0,50	1,6			0,25	1	2,25	1 <sup>e</sup> a	0,333	$\infty$	$\infty$
1 <sup>e</sup> as.	1/7	$\infty$	$\infty$	1 <sup>e</sup> as.	0,20	$\infty$					
				2 <sup>e</sup> as.	$c = 1,8$						
					$c = 1,36$						

On voit que, quel que soit l'indice, la valeur minimum de  $e$  est plus grande que la longueur focale.

#### 11. Cas où $n = 1,5$ et $\alpha = -1, \infty, -0,9, -0,5, -2, +1, -4/3$

Les deux premiers de ces cas sont les cas de dégénérescence considérés plus haut : les hyperboles se réduisent à leurs asymptotes.

Les tableaux montrent que, pour  $R_1 > n - 1$ , on n'obtient

une modification appréciable de  $\alpha$  que pour une épaisseur déjà considérable de la lentille, dans les meilleures conditions. (Voir aussi fig. 1).

$\alpha = -0,90$		$\alpha = -0,5$		$\alpha = -2$		$\alpha = -4/3$		$\alpha = +1$	
$R_1$	$e$	$R_1$	$e$	$R_1$	$e$	$R_1$	$e$	$R_1$	$e$
1 min.	0,693	1	1,8	1	4,5	1		1	2,571
0,870	0,682	0,75 min.	1,558	0,75	2,893	0,75	6,75	0,75	2,025
0,7	0,723	0,591	1,469	0,5	1,5	0,6	2,7	0,50	1,5
0,5 1 <sup>e</sup> as.	1,5	0,5	1,5	0,4	1,029	0,5	1,5	0,40	1,389
0,435 2 <sup>e</sup> as.	$\infty$	0,4 1 <sup>e</sup> as.	1,8 min.	0,2	0,3	0,4	0,8	0,25	1,125
$c = 0,391$		0,286	$\infty$	0	0	0,3	0,386	0,20	1,20
$e_0 = 0,170$		2 <sup>e</sup> as.		$\begin{cases} c = 1,287 \\ e_0 = 0,371 \end{cases}$	$\begin{cases} (-0,5)(4,5) \\ 1^e \text{ as.} \end{cases}$	1 <sup>e</sup> as.	$\infty$	1 <sup>e</sup> as.	
					$\begin{cases} -1 \\ 2^e \text{ as.} \end{cases}$	$\begin{cases} c = -3 \\ e_0 = -3 \end{cases}$		$\begin{cases} c = 2,25 \\ e_0 = 0,281 \end{cases}$	
					$\begin{cases} c = 9 \\ e_0 = -9 \end{cases}$				

### 12. Valeurs de $e$ sur le lieu des minima ( $n = 1,5$ )

$R_1$	0 et 1	0,1 et 0,9	0,2 et 0,8	0,3 et 0,7	0,4 et 0,6	0,5
$e$	0	0,54	0,96	1,26	1,44	1,5

13. Valeurs exactes de  $\delta F$  sur l'hyperbole  $\alpha = 0$ . Les relations qui précèdent sont différentielles et ne valent donc pas, en principe, pour des valeurs finies de  $\delta n$ . Le tableau suivant, donne la valeur exacte de  $F$  — calculée par la relation (1) — pour deux lentilles telles que  $F_o = 1$  et  $\alpha = 0$ , les calculs étant effectués, pour chaque lentille, pour  $n = 1,5$  et  $n = 1,52$ .

$R_1$	$F_o(n = 1,5)$	$F$ exact ( $n = 1,52$ )
1	1	1,00105
0,40	1	1,00101

On voit, par ces résultats, que les formules qui précèdent sont pratiquement applicables (spectre secondaire très réduit) dans un large intervalle de variation de  $n$ , au moins en dehors de cas exceptionnels.

14. *Condition d'achromatisme.* On peut écrire cette condition sous une forme comparable à celle sous laquelle on met en général la condition d'achromatisme de la longueur focale de la combinaison de deux lentilles minces de même  $\nu$  séparées par un intervalle  $d$  d'air. On sait que cette condition est  $d = (f_1 + f_2)/2$ . Ici la distance  $d$  à introduire dans les formules vaut  $e/n$ . On a

$$\phi = \varphi_1 + \varphi_2 - \frac{e}{n} \varphi_1 \varphi_2$$

avec  $\varphi_1 = R_1/(n - 1)$  et  $\varphi_2 = -R_2/(n - 1)$ . D'où

$$\delta\phi = \frac{1}{\nu} \left( \varphi_1 + \varphi_2 - 2 \frac{e}{n} \varphi_1 \varphi_2 + \frac{e}{n^2} \varphi_1 \varphi_2 (n - 1) \right)$$

La condition d'achromatisme s'écrit

$$\varphi_1 + \varphi_2 - \frac{e}{n^2} (2n - n + 1) \varphi_1 \varphi_2 = 0$$

ou

$$f_1 + f_2 = \frac{e}{n^2} (n + 1)$$

d'où

$$e = \frac{f_1 + f_2}{n + 1} n^2 \quad (19)$$

Cette relation se réduit à la relation classique pour  $n = 1$  (air).

## La lentille épaisse convergente. II. Achromatisme du point image sur l'axe.

### SOMMAIRE

Supposant le point objet achromatique on étudie successivement le cas du point objet à l'infini et le cas du point objet quelconque. Dans le premier cas, supposant  $F = 1$  et  $R_1$  donné ainsi que  $n$ , on obtient  $e$  et  $R_1$  par des relations explicites simples : avec les données ci-dessus indiquées, il y a toujours une lentille et une seule qui résout le problème. Mais le foyer image achromatique se trouve toujours dans la lentille. Dans le cas général, la position du point sur l'axe et celle de son image étant fixées par les variables  $L$  et  $L'$ , la condition d'achromatisme s'écrit (pour  $F = 1$ ).

$$-[nR_1R_2(L + L' + 2) + e(n-1)(L'R_1 - LR_2)]$$

$$[n^2(R_2 - R_1) + e(n^2 - 1)] + enR_1R_2(L'R_1 - LR_2) = 0$$

Dans le cas particulier où  $L = L' = 1$  (grandissement = 1) la relation se simplifie. L'image achromatique peut se trouver en-dehors de la lentille. Les notations employées sont les notations classiques habituelles, sauf  $L$  et  $L'$  définies dans des travaux antérieurs.

### a. ACHROMATISME DU FOYER IMAGI

1. Les conventions et les notations sont les mêmes que dans un travail précédent (1). Rappelons que l'on a

$$\phi = \frac{1}{F} = \frac{n(n-1)(R_2 - R_1) + e(n-1)^2}{nR_1R_2} \quad (1)$$

et, par variation de  $n$ ,

$$\frac{\delta F}{\phi^2} = \frac{\frac{\delta \phi}{\phi^2}}{\frac{1}{\phi^2}} = \frac{n^2(R_2 - R_1) + e(n^2 - 1)}{n^2R_1R_2} \frac{\delta n}{\delta n} \quad (2)$$

Par ailleurs, la dernière abscisse focale  $x'_F$  vaut

$$x'_F = F \left( 1 - \frac{e(n-1)}{R_1 - n} \right)$$

d'où

$\delta x'_F$

$$\delta F \left[ 1 - \frac{e(n-1)}{R_1 - n} \right] - F \frac{e}{R_1} \frac{\delta n}{n^2} = -\frac{\delta \phi}{\phi^2} \left[ 1 - \frac{e(n-1)}{R_1 - n} \right] - F \frac{e}{R_1} \frac{\delta n}{n^2}$$

(1) *Ann. Soc. Scient. Brux., LXXII, n° III, p. 107-117.*

Egalons à zéro et multiplions par  $\phi^2$ . Il vient

$$\delta\Phi \left[ 1 - \frac{e}{R_1} \frac{n-1}{n} \right] + \Phi \frac{e}{R_1} \frac{\delta n}{n^2} = 0$$

Remplaçons  $\phi$  et  $\delta\phi$  par leurs valeurs et divisons par  $\delta n$

$$\frac{n^2(R_2 - R_1) + e(n^2 - 1)}{nR_1R_2} \left[ 1 - \frac{eR_2}{R_1R_2} \frac{n-1}{n} \right] + \frac{n(n-1)(R_2 - R_1) + e(n-1)^2}{nR_1R_2} \frac{eR_2}{n^2R_1R_2} = 0$$

d'où

$$[n^2(R_2 - R_1) + e(n^2 - 1)][nR_1 - e(n-1)] + e[n(n-1)(R_2 - R_1) + e(n-1)^2] = 0$$

Développons et ordonnons par rapport à  $e$ . Il vient

$$e^2(n-1)^2 - e(n-1)[2nR_1 - R_2(n-1)] - n^2R_1(R_2 - R_1) = 0 \quad (3)$$

Posons que la longueur focale est égale à l'unité. On a

$$nR_1R_2 = n(n-1)(R_2 - R_1) + e(n-1)^2 \quad (4)$$

2. De la relation (4) on tire

$$R_2 = \frac{e(n-1)^2 - n(n-1)R_1}{nR_1 - n(n-1)} \quad (5)$$

d'où

$$R_2 - R_1 = \frac{e(n-1)^2 - nR_1^2}{nR_1 - n(n-1)} \quad (6)$$

Introduisons les valeurs (5) et (6) dans (3). On a, tous calculs faits

$$e^2(n-1)^2 [nR_1 - (n-1)] - enR_1(n-1) [2nR_1 - (n-1)] + n^3R_1^3 = 0 \quad (7)$$

Le discriminant  $\Delta$  de cette équation en  $e$  vaut de sorte que les racines de (7) sont

$$\Delta = R_1^2 n^2 (n-1)^2$$

$$e' = \frac{n^2 R_1^2}{(n-1) [nR_1 - (n-1)]} \quad e'' = \frac{nR_1}{n-1} \quad (8)$$

Ces deux valeurs, introduites dans (5) donnent

$$R'_2 = \frac{R_1(n-1)^2}{[nR_1 - (n-1)][R_1 - (n-1)]} \quad R''_2 = 0 \quad (9)$$

Il n'existe donc en pratique qu'un seul système convenable de  $e$  et  $R_2$  qui résout le problème.

3. *Discussion de  $e$ .* La relation (8), donnant la seule valeur acceptable de  $e$ , représente dans le plan  $(R_1, e)$  une hyperbole qui passe par l'origine. Une des asymptotes, parallèle à l'axe des  $e$ , a pour équation  $R_1 = (n-1)/n$ . (10)

Le coefficient angulaire  $c$  de l'autre asymptote vaut  $\lim e/R_1$  soit

$$c = \frac{n}{n-1} > 0$$

L'ordonnée à l'origine  $e_0$  a pour valeur  $\lim (e - cR_1)$ , c'est-à-dire

$$e_0 = 1$$

Recherchons le minimum de  $e$  en faisant  $\delta e / \delta R_1 = 0$ . On trouve, comme condition

$$R_1 = 0 \text{ ou } R_1 = \frac{2(n-1)}{n}$$

correspondant à (par (8))

$$e = 0 \text{ et } e = 4$$

La branche utile de l'hyperbole se trouve dans l'angle supérieur des asymptotes. En effet, on voit facilement que pour  $R_1 = 2(n-1)/n$  l'ordonnée vaut 3 sur l'asymptote alors qu'elle vaut 4 sur la courbe. Il en résulte que l'on doit avoir  $R_1 > (n-1)/n > 0$ .  $R_1$  est toujours positif.

4. *Discussion de  $R_2$ .* La formule (9) montre que  $R_2$  est représentée en fonction de  $R_1$  par une courbe du troisième degré qui possède deux asymptotes parallèles à  $OR_2$  définies par

$$R_1 = (n-1)/n \text{ et } R_1 = n-1 \quad (11)$$

(9) montre aussi que, quand  $R_1$  tend vers l'infini,  $R_2$  tend vers 0. L'axe des  $R_1$  est une troisième asymptote.

Pour les valeurs de  $R_1$  comprises entre celles qui définissent les asymptotes (11),  $R_2$  est  $< 0$  et tend vers  $-\infty$  quand  $R_1$  tend

vers les valeurs (11). La branche de la courbe qui représente  $R_2$  possède donc un maximum dans l'intervalle. Il correspond à  $\delta R_2 / \delta R_1 = 0$ , ce qui donne, pour ce point,

$$R_1 = \frac{n-1}{\sqrt{n}}$$

d'où

$$R_{2\max.} = \frac{(n-1) \sqrt{n}}{2n - (n+1) \sqrt{n}}$$

Pour  $R_1 > (n-1)$ ,  $R_2$  varie de  $-\infty$  à 0.

La valeur de  $R_2$  correspondant au minimum de  $e$  est

$$R_2 = \frac{2(n-1)}{2-n}$$

### 5. Tableau de valeurs de $R_1$ , $R_2$ , $e$ et $x'_F$ pour $n = 1,5$

Les formules précédentes donnent ( $F = 1$ )

	$R_1$	$R_2$	$e$	$x'_F$
$\frac{n-1}{n}$	1/3	$-\infty$	$\infty$	$-\infty$
$(n-1)/\sqrt{n}$	0,4	- 10	18	- 5
$\frac{n-1}{e \min.}$	0,4082	- 9,8	9,8	- 4,45
0,5	0,5	$\infty$	4,5	- 2
2/3	2/3	+ 1	4	- 1 (qq. soit $n$ )
5/6	5/6	5/6	4,167	- 2/3
1	1	0,5	4,5	- 0,5

### 6. Valeur de $x'_F$ . Puisque $F = 1$ , on a

$$x'_F = 1 - \frac{e}{R_1} \frac{n-1}{n} = - \frac{n-1}{nR_1 - (n-1)}$$

Puisque l'on doit avoir  $R_1 > (n-1)/n$ , les deux termes de la fraction sont positifs et  $x'_F$  est toujours plus petit que zéro : le foyer achromatique se trouve toujours à l'intérieur de la lentille.

### 7. Valeur de $\delta F$ . Si l'on introduit les valeurs (8) et (9) dans (2), on trouve

$$\delta F = - \frac{R_1}{(n-1)^2} \delta n = - \frac{f_1}{v}$$

Le chromatisme de la longueur focale est plus grand ou plus petit que celui de la lentille mince de même longueur focale selon que  $f_1$  est  $\geq$  ou  $<$  F.

## b. CAS GÉNÉRAL

8. Soit A un point objet achromatique situé sur l'axe optique et A' son image. Nous allons exprimer la condition pour que les rayons de toutes les longueurs d'onde émis par A se recoupent en A'. Il est utile de raisonner sur une figure. Comme elle est très simple, nous prions le lecteur de la faire. Représentons d'abord la section méridienne de la lentille en la supposant sensiblement équiconvexe (cas possible). Traçons l'axe optique. Sur cet axe plaçons d'abord le foyer objet F (à gauche de la lentille), puis le foyer image (à droite de la lentille), pour la radiation de base (C par exemple). Plaçons ensuite les foyers correspondant à une autre radiation (F' par exemple), respectivement entre F et la lentille puis entre la lentille et F'. Plaçons encore le point objet A à gauche de F et son image A' pour la radiation C à droite de F'. Nous pouvons aussi représenter les plans principaux H et H' dans la lentille et dans l'ordre.  $x_F$  représentera la distance du premier sommet de la lentille au point F;  $x'_F$  la distance du deuxième sommet à F'. Appelons L la distance AF et L' la distance F'A'. Avec les conventions de signe habituelles on peut écrire, par la relation de Newton

$$LL' = F^2 \quad (12)$$

La distance du foyer  $F_C$  au foyer  $F_F$  représente  $\delta x_F$ ; celle du foyer  $F'_C$  au foyer  $F'_F$  est  $\delta x'_F$ . Si A' est achromatique en même temps que A on peut écrire

$$(L + \delta x_F)(L' + \delta x'_F) = (F + \delta F)^2 \quad (13)$$

Combinons (13) avec (12). Il suit la condition

$$L' \delta x_F - L \delta x'_F = 2F \delta F \quad (14)$$

9. Comme on a

$$x_F = -F \left( 1 + \frac{e}{R_2} \frac{n-1}{n} \right)$$

$$x'_F = F \left( 1 - \frac{e}{R_1} \frac{n-1}{n} \right)$$

on trouve, en différentiant

$$\delta x_F = -\delta F \left( 1 + \frac{e}{R_2} \frac{n-1}{n} \right) - F \frac{\delta n}{n^2} \frac{e}{R_2}$$

$$\delta x'_F = \delta F \left( 1 - \frac{e}{R_1} \frac{n-1}{n} \right) - F \frac{\delta n}{n^2} \frac{e}{R_1} \quad (15)$$

Introduisons les relations (15) dans (14). On a successivement

$$\begin{aligned}
 & L' \left[ \delta F \left( 1 + \frac{e}{R_2} \frac{n-1}{n} \right) + F \frac{\delta n}{n^2} \frac{e}{R_2} \right] \\
 & + L \left[ \delta F \left( 1 - \frac{e}{R_1} \frac{n-1}{n} \right) - F \frac{\delta n}{n^2} \frac{e}{R_1} \right] + 2F\delta F = 0 \\
 & \left( L + L' + 2F + L' \frac{e}{R_2} \frac{n-1}{n} - L \frac{e}{R_1} \frac{n-1}{n} \right) \delta F \\
 & + eF \frac{\delta n}{n^2} \left( \frac{L'}{R_2} - \frac{L}{R_1} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Remplaçons  $\delta F$  par sa valeur (2) et divisons par  $F \delta n/n^2$

$$\begin{aligned}
 & - \left( L + L' + 2F + L' \frac{e}{R_2} \frac{n-1}{n} - L \frac{e}{R_1} \frac{n-1}{n} \right) \times \\
 & \frac{1}{\Phi} \frac{n^2(R_2 - R_1) + e(n^2 - 1)}{R_1 R_2} + e \left( \frac{L'}{R_2} - \frac{L}{R_1} \right) = 0 \\
 & \frac{n R_1 R_2 (L' + L + 2F) + e(n-1)L'R_1 - e(n-1)L R_2}{n R_1 R_2} \times \\
 & \frac{n^2(R_2 - R_1) + e(n^2 - 1)}{R_1 R_3} + e\Phi \frac{L'R_1 - L R_2}{R_1 R_2} = 0
 \end{aligned}$$

d'où, en posant  $\Phi = 1$

$$\begin{aligned}
 & -n^3 R_1 R_2 (R_1 - R_2) (L + L' + 2F) - e n^2 (n-1) (R_2 - R_1) \times \\
 & (L'R_1 - L R_2) - e n (n^2 - 1) R_1 R_2 (L + L' + 2F) - e^2 (n-1)^2 \times \\
 & (n+1) (L'R_1 - L R_2) + e n (n-1) (R_2 - R_1) (L'R_1 - L R_2) \\
 & + e^2 (n-1)^2 (L'R_1 - L R_2) = 0
 \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
 & e^2 (n-1)^2 (L'R_1 - L R_2) + e (n-1)^2 (R_2 - R_1) (L'R_1 - L R_2) \\
 & + e (n^2 - 1) (L' + L + 2F) R_1 R_2 \\
 & + n^2 R_1 R_2 (R_2 - R_1) (L + L' + 2F) = 0
 \end{aligned} \tag{16}$$

Comme on a ici  $LL' = F^2 = 1$ , on peut écrire (16) sous la forme

$$\begin{aligned}
 & e^2 (n-1)^2 (L'^2 R_1 - R_2) + e (n-1)^2 (R_2 - R_1) (L'^2 R_1 - R_2) \\
 & + e (n^2 - 1) (L' + 1)^2 R_1 R_2 + n^2 R_1 R_2 (R_2 - R_1) (L' + 1)^2 = 0
 \end{aligned} \tag{16'}$$

10. *Cas particuliers.* a)  $L' = 0$ . C'est le cas que nous avons considéré en a) ci-dessus. On retrouve facilement la formule (3).

b)  $L' = -1$ . Les points objet et image sont les points principaux. La condition (16') se réduit à

$$e(n-1)^2 (e + R_2 - R_1) (R_1 - R_2) = 0 \quad (17)$$

Elle est vérifiée pour

$$e = 0 \text{ (lentille mince)}$$

$$R_2 = +R_1 \text{ (lentille équiradiale, «Null-Linse»)}$$

$$e + R_2 - R_1 = 0$$

Introduisons dans cette dernière condition la valeur (6) de  $R_2 - R_1$ . Il vient successivement

$$e[nR_1 - n(n-1)] + e(n-1)^2 - nR_1^2 = 0$$

$$enR_1 - e(n-1) - nR_1^2 = 0$$

$$e = \frac{nR_1^2}{nR_1 - (n-1)}$$

Dans le plan  $(R_1, e)$  cette dernière relation représente une hyperbole dont une branche passe par l'origine. Un des asymptotes, parallèle à l'axe  $0e$ , a pour abscisse  $R_1 = (n-1)/n$ . L'autre a comme coefficient angulaire  $c = 1$  et comme ordonnée à l'origine  $e_0 = (n-1)/n$ . Le minimum de la branche utilisable est obtenu par  $R_1 = 2(n-1)/n$ , la valeur correspondante de  $e$  étant  $4(n-1)/n$ . La branche utile de l'hyperbole se trouve ici aussi dans l'angle supérieur des asymptotes.

c)  $L' = 1$ . Ce cas correspond au couple des points anti-principaux où le grandissement vaut 1 en valeur absolue. Il est intéressant de considérer ce cas en détail.

L'équation (16') peut s'écrire

$$(L' + 1)^2 R_1 R_2 [n^2(e + R_2 - R_1) - e]$$

$$- e(n-1)^2 (e + R_2 - R_1) (R_2 - L'^2 R_1) = 0$$

Faisons  $L' = 1$

$$4R_1 R_2 [(n^2 - 1)e - (R_1 - R_2)n^2]$$

$$+ e(n-1)^2 [e - (R_1 - R_2)] (R_1 - R_2) = 0$$

Posons  $R_1 R_2 = X$  et  $R_1 - R_2 = Y$ . Il vient

$$4X [(n^2 - 1)e - n^2 Y] + e(n-1)^2 (e - Y)Y = 0 \quad (18)$$

$$4X [(n^2 - 1)e - n^2 Y] + e(n-1)^2 (e - Y)Y = 0 \quad (19)$$

Mais (4) donne

$$X = \frac{-n(n-1)Y + e(n-1)^2}{n}$$

On a donc

$$4[-n(n-1)Y + e(n-1)^2][(n^2-1)e - n^2Y] + en(n-1)^2(e-Y)Y = 0 \quad (20)$$

11. Pour discuter cette relation, faisons-y  $n = 1.5$ . On a, dans ce cas

$$-48eY + 10e^2 + 54Y^2 + 3e^2Y - 3eY^2 = 0$$

ou

$$3Y^2(18-e) + 3eY(e-16) + 10e^2 = 0$$

d'où

$$Y = \frac{-3e(e-16) \pm e\sqrt{9(e-16)^2 - 40 \times 3(18-e)}}{6(18-e)}$$

Pour que Y soit réel, il faut

$$3(e-16)^2 - 40(18-e) \geq 0$$

Les racines du premier membre sont

$$e' = 17,766$$

$$e'' = 11,9006$$

Pour que Y soit réel, il faudra, en pratique, que l'on ait

$$0 < e \leq 0,9006$$

Mais cette condition, nécessaire, peut ne pas être suffisante pour que  $R_1$  et  $R_2$  soient réels. On a en effet, en vertu des relations (18)

$$R_1 = R_2 + Y \quad R_2(R_2 + Y) = X$$

d'où

$$R_2 = \frac{-Y \pm \sqrt{Y^2 + 4X}}{2}$$

Pour que  $R_2$  soit réel, il faut que l'on ait

$$\Delta = Y^2 + 4X \geq 0$$

Or, la relation (4) donne, pour  $n = 1,5$

$$X = \frac{-3Y + e}{6}$$

Introduisons dans la valeur de  $\Delta$ . Pour que  $R_2$  soit réel, on doit avoir

$$3\Delta = 3Y^2 - 2 \times 3Y + 2e \geq 0$$

Les racines du premier membre sont

$$Y = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 24e}}{6}$$

Pour qu'elles soient réelles, il faut que

$$9 - 24e \geq 0$$

$$0 < e \leq 3,8 = 0,375$$

Pour la valeur limite  $e = 0,375$ , on trouve les couples correspondants

$$X = \begin{cases} -0,0365 \\ -0,0045 \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 0,198 \\ 0,134 \end{cases}$$

Les valeurs inférieures seules donnent une valeur réelle pour  $R_2$  et  $R_1$ . On trouve

$$R_1 = -R_2 = 0,067, \text{ puis}$$

$$e = 0,375$$

$$x'_F = -0,866 \text{ d'où } x'_F + F = 0,134$$

Le point A' se trouve en dehors de la lentille. En raison de la symétrie de l'ensemble, le point A se trouve aussi en dehors de la lentille, à 0,134 en avant de la première surface.

## L'épaisseur équivalente d'une lentille absorbante

PAR

A. BIOT

### RÉSUMÉ

On donne les relations qui permettent de calculer l'épaisseur d'une lame à faces planes et parallèles de même matière que celle de la lentille et dont la transmission totale est égale à celle de cette dernière. Ces relations sont établies en se limitant aux termes du premier ordre. Les intégrations que l'on rencontre ont toutefois été effectuées pour les termes du second ordre également, de sorte que l'on donne les moyens de tenir compte de ces termes.

1. *Le problème.* Considérons une lentille à faces sphériques traversée par des rayons lumineux parallèles à l'axe optique. L'épaisseur traversée par les différents rayons varie avec leur distance à l'axe optique de sorte que au point de vue de l'absorption la lentille ne se comporte pas en général comme une lame à faces planes et parallèles — d'épaisseur uniforme. Nous nous proposons de calculer l'épaisseur  $X$  d'une telle lame dont la transmission globale soit la même que celle de la lentille. Nous ne tenons pas compte des pertes par réflexion sur les surfaces, que l'on peut facilement calculer à part.

Si, dans un cas donné, les rayons ne traversent pas la lentille parallèlement à l'axe, la transmission globale est différente de celle que nous calculons plus loin. Toutefois, cette dernière représentera en général une bonne approximation car il est rare que les rayons soient fortement inclinés sur l'axe.

La relation trouvée est simple si l'on suppose le facteur d'absorption petit, de sorte que les calculs sont faciles.

2. Selon la forme de la lentille, plusieurs cas peuvent se présenter pour les calculs. Dans les cas les plus simples, on peut avoir à faire : 1) à une lentille biconvexe tranchante au bord que l'on peut considérer comme formée par deux lentilles plan-

convexes appliquées l'une sur l'autre par leurs surfaces planes et d'épaisseurs respectives en leur sommet égales à  $x_{10}$  et  $x_{20}$ ; 2) à une lentille biconcave d'épaisseur nulle au centre, formée géométriquement de deux lentilles plan-concaves d'épaisseur  $x_{10}$  et  $x_{20}$  au bord; 3) à une lentille ménisque formée d'une lentille plan-convexe tranchante d'épaisseur au centre  $x_{10}$  et d'une lentille plan-concave d'épaisseur nulle au centre et égale à  $x_{20}$  au bord. Les cas pratiques correspondront à ces cas idéaux par interposition entre les lentilles d'une lame à faces planes et parallèles d'épaisseur  $x$ . Remarquons que pour une lentille ménisque cette épaisseur  $x$  est positive ou négative selon que le sommet de la lentille plan-concave se trouve au-delà ou en-deçà de la surface plane de la lentille plan-convexe. Nous verrons que le traitement des cas généraux se déduit facilement de celui des cas idéaux.

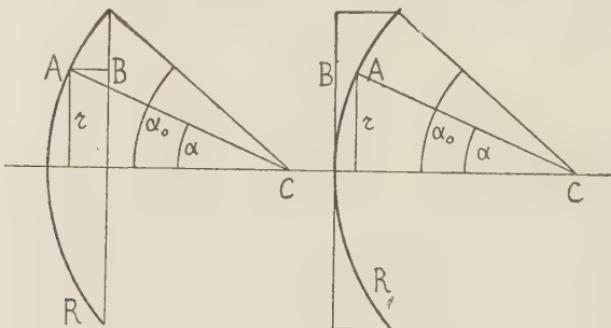


Fig. 1

3. *Notations.* Considérons une lentille plan-convexe tranchante au bord et une lentille plan-concave d'épaisseur nulle (fig. 1). Appelons  $R$  la valeur absolue du rayon de courbure. Calculons la longueur  $AB$  du segment de rayon lumineux situé à une distance  $r$  de l'axe. Pour  $r = 0$ , on a  $AB = x_0$ . Si  $C$  est le centre de courbure de la surface, appelons  $\alpha$  l'angle que fait  $AC$  avec l'axe. Au bord, cet angle sera désigné par  $\alpha_0$ . On a, en général, pour la surface convexe

$$\begin{aligned} r &= R \sin \alpha \\ r_0 &= R \sin \alpha_0 \\ x_0 &= R(1 - \cos \alpha_0) \quad (\text{épaisseur au centre}) \end{aligned} \tag{1}$$

$$AB = R(1 - \cos \alpha_0) - R(1 - \cos \alpha) = R(\cos \alpha - \cos \alpha_0)$$

Pour la lentille concave, on a de même

$$\begin{aligned} r &= R \sin \alpha \\ r_0 &= R \sin \alpha_0 \\ x_0 &= R(1 - \cos \alpha_0) \text{ (épaisseur au bord)} \\ |AB| &= R(1 - \cos \alpha) \end{aligned} \quad (2)$$

4. *La loi de transmission.* Dans le cas général, on a pour expression de l'épaisseur  $\varepsilon$  traversée à une distance  $r$  de l'axe

$$\varepsilon = |AB|_1 + x + |AB|_2 \quad (3)$$

Considérons une lame à faces planes et parallèles de cette épaisseur. Supposons qu'un flux  $\varphi_0$  quitte la première surface dans la lame. Par suite de l'absorption, il n'arrive sur la seconde surface qu'un flux  $\varphi < \varphi_0$  et l'on sait que l'on a

$$\varphi / \varphi_0 = e^{-a\varepsilon} \quad (4)$$

$a$  représente le coefficient d'absorption. Si, par exemple,  $\varphi / \varphi_0 = 0,99$ ,  $a = 0,01$  pour l'unité d'épaisseur. En pratique,  $a$  est souvent petit, de sorte que l'on peut généralement négliger des termes qui renferment  $a^2$ .

5. *Etude du cas n° 1 (lentille biconvexe tranchante).* Affectons de l'indice 1 les éléments relatifs à la première surface; de l'indice 2 ceux qui se rapportent à la deuxième. On a

$$r = R_1 \sin \alpha_1 = R_2 \sin \alpha_2 \quad (5)$$

d'où

$$dr = R_1 \cos \alpha_1 d\alpha_1 = R_2 \cos \alpha_2 d\alpha_2 \quad (6)$$

Considérons un élément du flux total compris entre les cylindres définis par  $r$  et  $r + dr$ . La surface transversale de cet élément vaut  $2\pi r dr$ . L'élément  $d\varphi_0$  du flux qui quitte la première surface vaut, si  $\varphi_0$  est le flux total

$$d\varphi_0 = \varphi_0 \frac{2r dr}{r_0^2} = \varphi_0 \frac{2r_1^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 d\alpha_1}{r_0^2}$$

La partie  $d\varphi$  de ce flux qui arrive à la seconde surface est

$$d\varphi = d\varphi_0 e^{-a\varepsilon}$$

Le flux total  $\varphi$  vaut donc,

$$\varphi = \varphi_0 \frac{2R_1^2}{r_0^2} \int_0^{a/10} e^{-a\varepsilon} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 d\alpha_1$$

avec, d'après (5)

$$2R_1^2/r_0^2 = 2/\sin^2 \alpha_{10}$$

Or, dans le cas que nous étudions,

$$\varepsilon = R_1(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_{10}) + R_2(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_{20}) \\ = (R_1 \cos \alpha_1 + R_2 \cos \alpha_2) - (R_1 \cos \alpha_{10} + R_2 \cos \alpha_{20})$$

D'où

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{2R_1^2}{r_0^2} \int_0^{\alpha_{10}} e^{-a(R_1 \cos \alpha_1 + R_2 \cos \alpha_2) + a(R_1 \cos \alpha_{10} + R_2 \cos \alpha_{20})} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 d\alpha_1 \\ = \frac{2R_1^2}{r_0^2} e^{a(R_1 \cos \alpha_{10} + R_2 \cos \alpha_{20})} \times \\ \int_0^{\alpha_{10}} e^{-a(R_1 \cos \alpha_1 + R_2 \cos \alpha_2)} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 d\alpha_1 \\ = A \int_0^{\alpha_{10}} e^{-a(R_1 \cos \alpha_1 + R_2 \cos \alpha_2)} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 d\alpha_1$$

avec

$$A = \frac{2R_1^2}{r_0^2} e^{a(R_1 \cos \alpha_{10} + R_2 \cos \alpha_{20})}$$

Pour effectuer l'intégration développons l'exponentielle sous le signe d'intégration en négligeant les termes à partir du quatrième

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = A \int_0^{\alpha_{10}} [1 - (aR_1 \cos \alpha_1 + aR_2 \cos \alpha_2) \\ + \frac{1}{2}(aR_1 \cos \alpha_1 + aR_2 \cos \alpha_2)^2 \dots] \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 d\alpha_1 \\ = A \left( \int_0^{\alpha_{10}} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 d\alpha_1 - aR_1 \int_0^{\alpha_{10}} \cos^2 \alpha_1 \sin \alpha_1 d\alpha_1 \right. \\ - aR_2 \int_0^{\alpha_{10}} \cos \alpha_2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 d\alpha_1 \\ + \frac{1}{2} a^2 R_1^2 \int_0^{\alpha_{10}} \cos^3 \alpha_1 \sin \alpha_1 d\alpha_1 \\ + \frac{1}{2} a^2 R_2^2 \int_0^{\alpha_{10}} \cos^2 \alpha_2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 d\alpha_1 \\ \left. + a^2 R_1 R_2 \int_0^{\alpha_{10}} \cos \alpha_2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 d\alpha_1 \right)$$

Les intégrations sont immédiates, sauf la dernière sur laquelle nous reviendrons plus loin. On trouve

$$\begin{aligned}\frac{\varphi}{\varphi_0} = & A \left( \frac{\sin^2 \alpha_{10}}{2} - \frac{1}{3} a R_1 (1 - \cos^3 \alpha_{10}) - \frac{1}{3} a R_2 (1 - \cos^3 \alpha_{20}) \right. \\ & + \frac{1}{8} a^2 R_1^2 (\cos^4 \alpha_{10} - 1) + \frac{1}{8} a^2 R_2^2 (\cos^4 \alpha_{20} - 1) \\ & \left. + \frac{1}{16} a^2 R_1^2 \left( -b^4 \frac{t^{-4}}{4} + \frac{t^4}{4} - 2b^2 \operatorname{Log} t \right)_0^{\alpha_{10}} \right) \quad (7)\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}b &= (R_2^2 - R_1^2) R_1^2 \text{ et } t = \sqrt{b - \cos^2 \alpha_1} - \cos \alpha_1 \\ &= \frac{R_2 \cos \alpha_2 - R_1 \cos \alpha_1}{R_1}\end{aligned}$$

La dernière intégrale peut se calculer comme suit

$$\begin{aligned}& a^2 R_1 R_2 \int_0^{\alpha_{10}} \cos \alpha_2 \cos^2 \alpha_1 \sin \alpha_1 d\alpha_1 \\ &= a^2 R_1 R_2 \int_0^{\alpha_{10}} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2} \cos^2 \alpha_1 \sin \alpha_1 d\alpha_1 \\ &= a^2 R_1 R_2 \int_0^{\alpha_{10}} \sqrt{1 - \frac{R_2^2}{R_1^2} \sin^2 \alpha_1} \cos^2 \alpha_1 \sin \alpha_1 d\alpha_1 \\ &= a^2 R_1^2 \int_0^{\alpha_{10}} \sqrt{\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2} + \cos^2 \alpha_1} \times \cos^2 \alpha_1 \sin \alpha_1 d\alpha_1 \\ &= a^2 R_1^2 \int_0^{\alpha_{10}} \sqrt{b + \cos^2 \alpha_1} \times \cos^2 \alpha_1 \sin \alpha_1 d\alpha_1\end{aligned}$$

Posons  $\cos \alpha_1 = x$ . L'intégrale s'écrit

$$a^2 R_1^2 \int_1^{x_0} \sqrt{1 + x^2} x^2 dx$$

C'est une forme classique que l'on peut intégrer en posant

$$\sqrt{1 + x^2} = t + x$$

d'où la valeur de  $x$  en élévant au carré et  $dx$  en différentiant alors.

On arrive ainsi à des intégrations immédiates qui donnent l'expression écrite plus haut.

Nous négligerons dans ce qui va suivre les termes en  $a^2$  dont il serait facile de tenir compte.

Reprenons la valeur de A; on peut écrire

$$A = \frac{2R_1^2}{r_0^2} [1 + (aR_1 \cos \alpha_{10} + aR_2 \cos \alpha_{20}) + \frac{1}{2} (aR_1 \cos \alpha_{10} + aR_2 \cos \alpha_{20})^2 + \dots]$$

Nous devons, ici, négliger aussi les termes d'ordre supérieur. Introduisons dans (7)

$$\begin{aligned} \frac{\varphi}{\varphi_0} &= \frac{2}{\sin^2 \alpha_{10}} \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \alpha_{10} - \frac{1}{3} aR_1 (1 - \cos^3 \alpha_{10}) + \frac{1}{2} \cos \alpha_{10} \sin^2 \alpha_{10} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} aR_2 \frac{R_2^2}{R_1^2} (1 - \cos^3 \alpha_{20}) + \frac{1}{2} aR_2 \cos \alpha_{20} \sin^2 \alpha_{10} \right] \quad \cdot \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Groupons les deuxième et troisième termes du second membre} \\ - \frac{1}{3} aR_1 (1 - \cos^3 \alpha_{10}) + \frac{1}{2} \cos \alpha_{10} \sin \alpha_{10} = \\ - aR_1 (1 - \cos \alpha_{10}) [\frac{1}{3} (\cos^2 \alpha_{10} + \cos \alpha_{10} + 1) - \frac{1}{2} \cos \alpha_{10} (1 + \cos \alpha_{10})] \\ = - a\alpha_{10} (\frac{2}{6} - \frac{1}{6} \cos^2 \alpha_{10} - \frac{1}{6} \cos \alpha_{10}) \\ = - \frac{1}{6} a\alpha_{10} (\sin^2 \alpha_{10} + 1 - \cos \alpha_{10}) \end{aligned}$$

On trouve de même pour les quatrième et cinquième termes

$$\begin{aligned} - \frac{1}{3} aR_2 \frac{R_2^2}{R_1^2} (1 - \cos^3 \alpha_{20}) + \frac{1}{2} aR_2 \cos \alpha_{20} \sin^2 \alpha_{10} \\ = - aR_2 \frac{R_2^2}{R_1^2} [\frac{1}{3} (1 - \cos^3 \alpha_{20}) - \frac{1}{2} \cos \alpha_{20} \sin^2 \alpha_{10}] \\ = - aR_2 (1 - \cos \alpha_{20}) \frac{\sin^2 \alpha_{10}}{\sin^2 \alpha_{20}} [\frac{1}{3} (\cos^2 \alpha_{20} + \cos \alpha_{20} + 1) \\ - \frac{1}{2} \cos \alpha_{20} (1 + \cos \alpha_{20})] \\ = - \frac{1}{6} a\alpha_{20} \frac{\sin^2 \alpha_{10}}{\sin^2 \alpha_{20}} (\sin^2 \alpha_{20} + 1 - \cos \alpha_{20}) \end{aligned}$$

Introduisons dans (8)

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = 1 - \frac{1}{3} a\alpha_{10} \left[ 1 + \frac{1 + \cos \alpha_{10}}{\sin^2 \alpha_{10}} \right] - \frac{1}{3} a\alpha_{20} \left[ 1 + \frac{1 - \cos \alpha_{20}}{\sin^2 \alpha_{20}} \right]$$

Mais on a

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

D'où

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = 1 - \left[ \frac{1}{3} \alpha x_{10} \left( 1 - \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\alpha_{10}}{2}} \right) + \frac{1}{3} \alpha x_{20} \left( 1 + \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\alpha_{20}}{2}} \right) \right]$$

or

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} &= \frac{1}{2} \left( 2 + \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 2 + \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left( 3 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right) \end{aligned}$$

On a donc, définitivement

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = 1 - \frac{\alpha}{6} \left( x_{10} \left[ 3 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{10}}{2} \right] + x_{20} \left[ 3 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{20}}{2} \right] \right) \quad (9)$$

6. *Etude du deuxième cas (lentille biconcave sans épaisseur).*

On trouve, dans ce cas,

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{2}{\sin^2 \alpha_{10}} \int_0^{\alpha_{10}} e^{-[\alpha R_1(1 - \cos \alpha_1) + \alpha R_2(1 - \cos \alpha_2)]} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 d\alpha_1$$

c'est-à-dire, en développant l'exponentielle jusqu'au second ordre

$$\begin{aligned} \frac{\varphi}{\varphi_0} &= \frac{2}{\sin^2 \alpha_{10}} \int_0^{\alpha_{10}} \{ 1 - [\alpha R_1(1 - \cos \alpha_1) + \alpha R_2(1 - \cos \alpha_2)] \\ &\quad + \frac{1}{2} [\alpha R_1(1 - \cos \alpha_1) + \alpha R_2(1 - \cos \alpha_2)]^2 \} \end{aligned}$$

ou, en intégrant par décomposition,

$$\begin{aligned} \frac{\varphi}{\varphi_0} &= \frac{2}{\sin^2 \alpha_{10}} \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \alpha_{10} - \frac{1}{2} \alpha R_1 \sin^2 \alpha_{10} - \frac{1}{2} \alpha R_2 \sin^2 \alpha_{20} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \alpha R_1(1 - \cos^3 \alpha_{10}) + \frac{1}{3} \alpha R_2(1 - \cos^3 \alpha_{20}) \frac{R_2^2}{R_1^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} a^2 R_1^2 \sin^2 \alpha_{10} + \frac{1}{8} a^2 R_1^2 (1 - \cos^4 \alpha_{10}) \\
& - \frac{1}{3} a^2 R_1^2 (1 - \cos^3 \alpha_{10}) + \frac{1}{2} a^2 R_2^2 \sin^2 \alpha_{20} \\
& + \frac{1}{8} a^2 R_2^2 \frac{R_2^2}{R_1^2} (1 - \cos^4 \alpha_{20}) - \frac{1}{3} a^2 R_2^2 (1 - \cos^3 \alpha_{20}) \\
& + \frac{1}{2} a^2 R_1 R_2 \sin^2 \alpha_{10} - \frac{1}{6} a^2 R_1 R_2 (1 - \cos^3 \alpha_{10}) \\
& - \frac{1}{6} a^2 R_1 R_2 \frac{R_2^2}{R_1^2} (1 - \cos^3 \alpha_{20}) + \frac{1}{2} a^2 R_1 R_2 \int_0^{\alpha_{10}} \cos^2 \alpha_1 \cos \alpha_2 \sin \alpha_1 d\alpha_1
\end{aligned}$$

La dernière intégrale a été calculée au § 5.

Négligeant les termes du second ordre, il reste

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi}{\varphi} &= 1 - \frac{2}{\sin^2 \alpha_{10}} \left( \frac{1}{2} a R_1 \sin^2 \alpha_{10} - \frac{1}{3} a R_1 (1 - \cos^3 \alpha_{10}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} a R_2 \frac{R_2^2}{R_1^2} \sin^2 \alpha_{20} - \frac{1}{3} a R_2 \frac{R_2^2}{R_1^2} (1 - \cos^3 \alpha_{20}) \right) \quad (10)
\end{aligned}$$

Groupons les deux premiers termes du crochet

$$\frac{1}{2} a R_1 \sin^2 \alpha_{10} - \frac{1}{3} a R_1 (1 - \cos^3 \alpha_{10}) =$$

$$\begin{aligned}
& a R_1 (1 - \cos \alpha_{10}) [\frac{1}{2}(1 + \cos \alpha_{10}) - \frac{1}{3}(1 + \cos \alpha_{10} + \cos^2 \alpha_{10})] \\
& = a x_{10} (\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cos \alpha_{10} - \frac{2}{6} \cos^2 \alpha_{10}) = \\
& \frac{1}{6} a x_{10} (1 + \cos \alpha_{10} - 2 \cos^2 \alpha_{10}) \\
& = \frac{1}{6} a x_{10} \left[ \sin^2 \frac{\alpha_{10}}{2} + \cos^2 \frac{\alpha_{10}}{2} - \cos^2 \frac{\alpha_{10}}{2} + \sin^2 \frac{\alpha_{10}}{2} - 2 \cos^2 \alpha_{10} \right] \\
& = \frac{1}{3} a x_{10} \left[ \cos^2 \frac{\alpha_{10}}{2} - 1 + \sin^2 \alpha_{10} \right] \\
& = \frac{1}{3} a x_{10} \left( -\sin^2 \frac{\alpha_{10}}{2} + \sin^2 \alpha_{10} \right)
\end{aligned}$$

On a de même, pour l'ensemble des troisième et quatrième termes,

$$\begin{aligned}
 & aR_2 \frac{R_2^2}{R_1^2} [\frac{1}{2} \sin^2 \alpha_{20} - \frac{1}{3} (1 - \cos^3 \alpha_{20})] \\
 &= aR_2 (1 - \cos \alpha_{20}) \frac{\sin^2 \alpha_{10}}{\sin^2 \alpha_{20}} [\frac{1}{2}(1 + \cos \alpha_{20}) - \frac{1}{3}(\cos^2 \alpha_{10} + \cos \alpha_{10} + 1)] \\
 &= a x_{20} \frac{\sin^2 \alpha_{10}}{\sin^2 \alpha_{20}} (\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cos \alpha_{20} - \frac{1}{6} \cos^2 \alpha_{20}) \\
 &= \frac{1}{3} a x_{20} \frac{\sin^2 \alpha_{10}}{\sin^2 \alpha_{20}} \left[ -\sin^2 \frac{\alpha_{20}}{2} + \sin^2 \alpha_{20} \right]
 \end{aligned}$$

Introduisons dans (10)

$$\begin{aligned}
 \frac{\varphi}{\varphi_0} &= \frac{2}{\sin^2 \alpha_{10}} \left\{ \frac{1}{2} \sin^2 \alpha_{10} - \frac{1}{3} a \left[ x_{10} \left( -\sin^2 \frac{\alpha_{10}}{2} + \sin^2 \alpha_{10} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + x_{20} \frac{\sin^2 \alpha_{10}}{\sin^2 \alpha_{20}} \left( -\sin^2 \frac{\alpha_{20}}{2} + \sin^2 \alpha_{20} \right) \right] \right\} \\
 \frac{\varphi}{\varphi_0} &= 1 - \frac{1}{3} a \left[ x_{10} \left( 2 - \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha_{10}}{2}}{\sin^2 \alpha_{10}} \right) + x_{20} \left( 2 - \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha_{20}}{2}}{\sin^2 \alpha_{20}} \right) \right] \\
 &= 1 - \frac{a}{3} \left[ x_{10} \left( 2 - \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\alpha_{10}}{2}} \right) + x_{20} \left( 2 - \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\alpha_{20}}{2}} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Mais

$$2 - \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \left( 4 - \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left[ 3 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right]$$

d'où, définitivement,

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = 1 - \frac{a}{6} \left( x_{10} \left[ 3 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{10}}{2} \right] + x_{20} \left[ 3 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{20}}{2} \right] \right) \quad (11)$$

7. *Etude du troisième cas* (lentille ménisque). Les calculs des deux paragraphes précédents permettent d'écrire immédiatement

$$\frac{\varphi}{\varphi_0} = 1 - \frac{a}{6} \left( x_{10} \left[ 3 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{10}}{2} \right] + x_{20} \left[ 3 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{20}}{2} \right] \right) \quad (12)$$

Rappelons que  $x_{20}$  est l'épaisseur au bord.

8. *Cas général.* Il faut dans ce cas ajouter  $-ax$  à l'exposant de l'exponentielle. Mais  $x$  est une constante, de sorte que l'on peut faire sortir  $e^{-ax}$  du signe d'intégration. On obtiendra la valeur de  $\varphi/\varphi_0$  en multipliant la valeur convenable (9), (11) et (12) par  $e^{-ax}$  ou, avec nos approximations, par  $1 - ax$ . Cela revient évidemment à ajouter  $-ax$  au second membre de ces expressions.

9. *L'épaisseur équivalente de la lentille.* Elle est donnée par l'expression

$$\varphi/\varphi_0 = 1 - aX$$

dans laquelle  $\varphi/\varphi_0$  est l'une des quantités calculées aux § précédents. On a donc, selon le cas

$$X = x + \frac{1}{6} \left[ x_{10} \left( 3 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{10}}{2} \right) + x_{20} \left( 3 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{20}}{2} \right) \right]$$

$$X = x + \frac{1}{6} \left[ x_{10} \left( 3 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{10}}{2} \right) + x_{20} \left( 3 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{20}}{2} \right) \right]$$

$$X = x + \frac{1}{6} \left[ x_{10} \left( 3 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{10}}{2} \right) + x_{20} \left( 3 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{20}}{2} \right) \right]$$

•

# Étude et première réalisation d'un stroboscope à déphasage variable, utilisant la modulation de lumière par les ultra-sons.

PAR

N. SEGARD — J. POULIQUEN — B. TRENTESAUX

Travail réalisé dans les laboratoires de  
l'Institut Supérieur d'Electronique du Nord, (Lille)

## I — PHÉNOMÈNES PHYSIQUES

— La diffraction de la lumière par les ondes ultra-sonores se propageant dans les liquides est un phénomène qui a été observé en 1932 par Messieurs Debye et Sears (1), puis mis en évidence par MM. Lucas et Biquard (2), et récemment étudié par MM. Nomoto (3) Wannier et Extermann (4). N. Segard et J. Pouliquen (5).

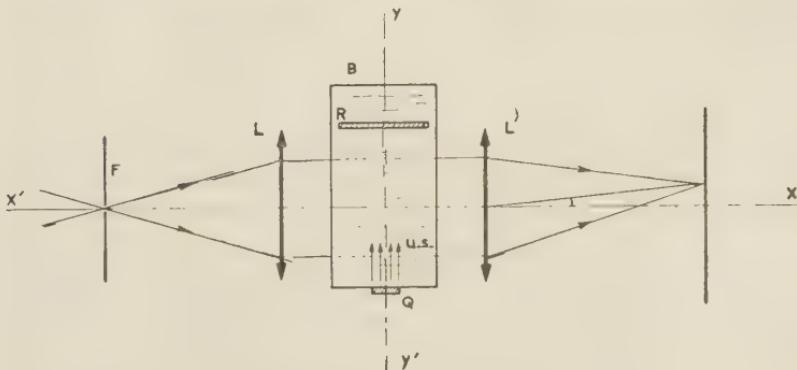


Fig. 1

— Une lame de quartz piézo-électrique Q, excitée sur une de ses fréquences propres  $f$ , émet des ondes ultra-sonores planes dans un liquide contenu dans le bac à faces parallèles B (fig. 1).

La direction de propagation de ces ondes étant normale au quartz, le liquide est soumis à des alternances de compression et de dilatation qui modifient sa densité; l'indice de réfraction dépendant de celle-ci subit des variations de fréquence  $f$ .

— Le bac étant éclairé par un faisceau de lumière blanche, parallèle aux plans d'onde, à l'aide d'une fente  $F$  et d'une lentille  $L$ , on observe dans le plan focal — image de la lentille  $L'$  — la figure de diffraction due aux ultra-sons : une image centrale encadrée de spectres symétriques analogues à ceux que fournirait un réseau plan de pas égal à  $\Lambda$ , longueur d'onde ultra-sonore.

— Cette figure subsiste si l'on place à une distance égale à un nombre entier de demi-longueurs d'onde  $K^{1/2}$  un réflecteur plan  $R$  qui provoque dans le liquide la formation d'une onde stationnaire. Celle-ci étant la superposition de deux ondes, l'une transmise par le quartz, l'autre réfléchie par le réflecteur, la figure de diffraction est équivalente à celle formée par la superposition des figures obtenues séparément par chacune des deux ondes. Le liquide passe deux fois par période en l'état d'homogénéité et les spectres de diffraction disparaissent à ces instants. Leur éclairement est donc modulé à la fréquence  $2f$ .

Il en est de même de celui de l'image centrale qui est maximum lorsque le liquide est homogène, et minimum lorsque l'onde ultra-sonore produit une variation  $\Delta p$  de pression maximum.

## 2 — BUT DE L'ÉTUDE (6)

— Il consiste à observer cet état d'homogénéité à l'instant où il se produit, en utilisant un faisceau lumineux modulé, à la fréquence  $2f$ , par un stroboscope.

— Si l'onde ultra-sonore incidente est totalement réfléchie, le liquide est soumis à un système d'ondes stationnaires à minima nuls. A l'instant de ces minima, la figure de diffraction se réduit à la frange centrale.

— Si la réflexion est imparfaite, les minima ne sont plus nuls la figure de diffraction présente un nombre  $N'$  de franges supérieur au précédent et inférieur à celui obtenu par un faisceau lumineux non modulé ( $N$ ).

— Il serait possible d'obtenir une valeur du taux d'onde stationnaire ( $\tau$ ) fonction de  $(N \pm N')$ .

### 3 — PRINCIPE DU STROBOSCOPE

— Nous utilisons le phénomène précédent pour réaliser la stroboscopie. (fig. 2).

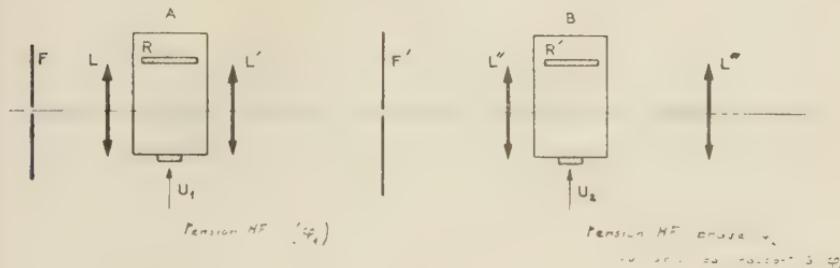


Fig. 2

— En effet, la brillance de la frange centrale varie périodiquement à la fréquence  $2f$ . Nous isolons cette frange pour éclairer un second bac dans lequel se produit le phénomène étudié, ce qui nous amène au schéma de principe — fig. 2.

— Pour atteindre le but assigné, nous devons être maître de l'instant où se produit l'impulsion lumineuse; il faudra que le bac modulateur A donne son maximum de franges lorsque le bac B donne son minimum, donc que les phases  $\varphi_A$  et  $\varphi_B$  des deux phénomènes soient en opposition.

La variation régulière de  $\varphi_A$  par rapport à  $\varphi_B$  permettra l'apparition progressive des franges jusqu'à leur nombre maximum.

### 4 — MATÉRIEL

#### A. Matériel optique

— Il se compose de deux ensembles distincts alignés sur un même axe horizontal  $x' x$ :

a. le montage se rapportant à la cellule modulatrice A qui servira de source lumineuse pour l'étude de phénomènes de diffraction dans un bac à ultra-sons B.

b. le bac B et les dispositifs d'observation de ces phénomènes

— Le schéma ci-dessous en indique la disposition générale :



Fig. 3

1. — La source lumineuse principale S est une lampe à vapeur de mercure dont on isole la raie verte (longueur d'onde  $\lambda = 5,461 \text{ \AA}$ ) au moyen d'un filtre de Wratten constitué par un film placé entre 2 lames de verre.

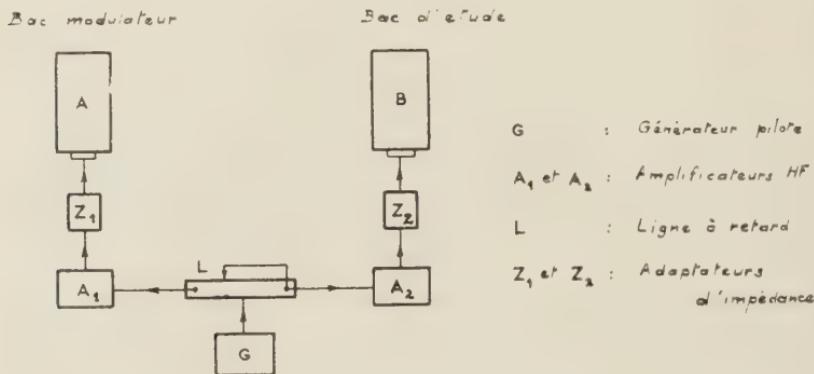


Fig. 4

— Une lentille  $L_1$  forme sur la fente  $F_1$ , qui est métallique et d'ouverture réglable, une image réelle de la source S.

— La lentille  $L_2$  donne de  $F_1$ , une image à l'infini.

— Le faisceau de rayons parallèles, issus de  $L_2$ , traverse alors un bac A qui constitue la cellule modulatrice (stroboscope).

— Un quartz  $Q_1$  émet donc des ondes ultra-sonores, rendues stationnaires au moyen d'un réflecteur R, lesquelles diffractent la lumière.

— Celle-ci est reçue par la lentille  $L_3$ , dont la distance focale est de 100 cm, et qui forme une image du spectre de diffraction sur la fente  $F_2$ .

Cette dernière est destinée à séparer la frange centrale de la figure obtenue, frange qui joue alors le rôle de source lumineuse modulée au double de la fréquence ultra-sonore, soit 2.001,8 KHz.

2. — Le bac B reçoit un faisceau de rayons parallèles issus de la lentille  $L_4$  dont le plan focal se trouve exactement sur  $F_2$ . Une onde ultrasonore, progressive ou stationnaire, provoque la diffraction de la lumière dont les franges à l'infini sont observées à l'aide de la lunette astronomique C (distance focale de l'objectif :  $f = 140$  cm).

— Dans le cas où l'on veut observer les phénomènes dans des plans situés à distance finie du bac B (franges localisées, on remplace C par une lunette ayant une distance focale objectif plus faible. Nous employons alors la petite lunette d'un cathétomètre, ce qui permet le réglage rapide en toutes directions).

### B. *Bacs à ultra-sons*

— Les générateurs d'ultra-sons A et B comportent deux cavités parallélépipédiques contenant l'une du pétrole, l'autre le liquide ultrasonné (eau).

— La charpente de la première cavité est construite en cornières d'acier soudées à l'autogène, sur lesquelles s'ajustent les parois latérales, par l'intermédiaire de joints étanches en caoutchouc. Le fond et la paroi face au quartz sont en tôle d'aluminium de 2 mm d'épaisseur.

Les parois latérales portent des glaces rectangulaires, de 7 mm d'épaisseur, dont le parallélisme est réglable par écrasement des joints souples (tubes de caoutchouc), le serrage étant réalisé par des cornières d'aluminium maintenues par vis de 3 mm sur la charpente métallique taraudée à cet effet.

— Des plaques de plexiglass de 4 à 8 mm d'épaisseur assemblées par collage (solution de plexiglass dans du trichloréthylène) constituent la seconde cavité parallélépipédique.

La paroi qui sépare les liquides est formée de 2 plaques de plexiglass (4 mm) superposées et usinées de façon à permettre le montage du quartz.

Celui-ci est un cristal de fréquence propre 1.000, 9Khz. De forme circulaire, il est fortement serré par les plaques précédentes, dont les chanfreins épousent exactement le biseau. Ce type de montage, rendu obligatoire par la condition d'étanchéité, présente l'inconvénient d'apporter un certain amortissement aux oscillations mécaniques du quartz; aussi faut-il veiller à donner aux chanfreins une largeur réduite au minimum.

— La tension HF est amenée au quartz par capacité, au moyen d'un piston monté sur porcelaine.

Celle-ci, en provenance du pilote d'origine duquel est tiré le quartz, a été usinée de façon à permettre au fluide une bonne circulation, ainsi que l'évacuation les bulles de cavitation dans le cas où ce fluide est le pétrole.

La fixation et le serrage sont assurés par 3 vis de 1,5. La distance quartz-pilote est réglée au moyen d'un volant extérieur soudé sur la vis à pas fin (25 S.I.) supportant le piston.

Notons que le retour de la HF se fait par l'eau et la masse du bac.

Le pétrole est bi-distillé et desséché sur calcium, afin d'être parfaitement isolant.

### C. Ensemble électronique

— Schéma de principe : Cfr fig. 4.

— Une ligne à retard est alimentée par une tension  $U_e$ , de fréquence 1.000,9 KHz, délivrée par un générateur pilote à quartz.

— Les tensions prises sur cette ligne sont envoyées sur deux amplificateurs HF alimentant chacun des bacs à U.S. par l'intermédiaire d'adaptateurs d'impédance.

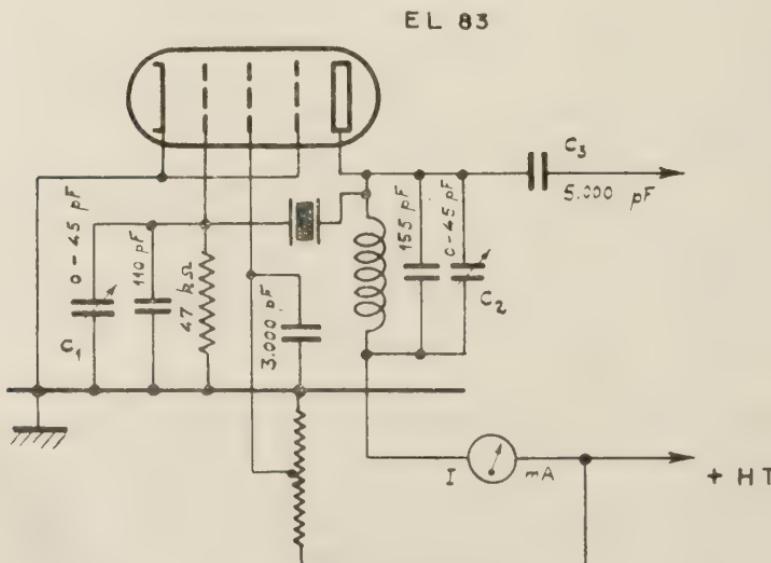


Fig. 5

- Le schéma fonctionnel de l'ensemble est celui de la fig. 3.
- Générateur pilote : oscillateur à quartz piézoélectrique (montage Pierce) Fig. 5.
- Ligne à retard (Fig. 6).

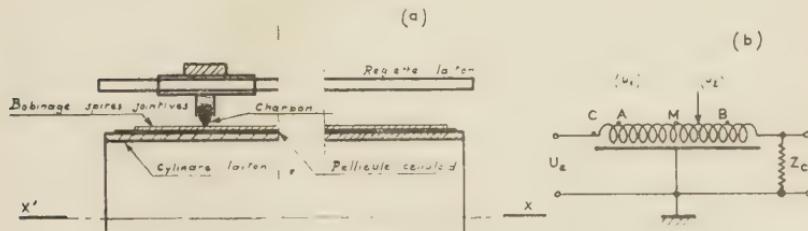


Fig. 6

— La self est constituée de 1.125 spires environ (fil de cuivre, isolé au vernis, de 32/100 mm de diamètre) bobinées jointivement sur un mandrin métallique isolé, de longueur 360 mm et enrobées de plexiglass destiné à maintenir les spires. Le vernis du fil de cuivre a été enlevé sur une largeur de 2 mm, pour former une piste longitudinale sur laquelle glisse un charbon dont la pression est assurée par un ressort prenant appui sur le fond d'un cylindre de laiton.

Celui-ci est fixé à un curseur mobile sur une réglette longitudinale de section carrée, située à 14 mm au dessus du bobinage, et reliée à une borne de sortie.

- La ligne est fermée sur son impédance caractéristique.
- Amplificateurs de puissance : ils utilisent deux tubes (EL 84 — 6L6).

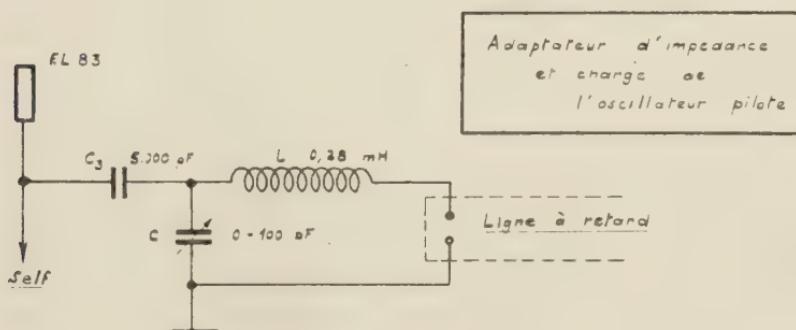


Fig. 7

Pour le second amplificateur (bac B) la puissance de sortie peut être réglée par la polarisation d'écran du second tube 6 L 6. (Fig. 8 et 9).

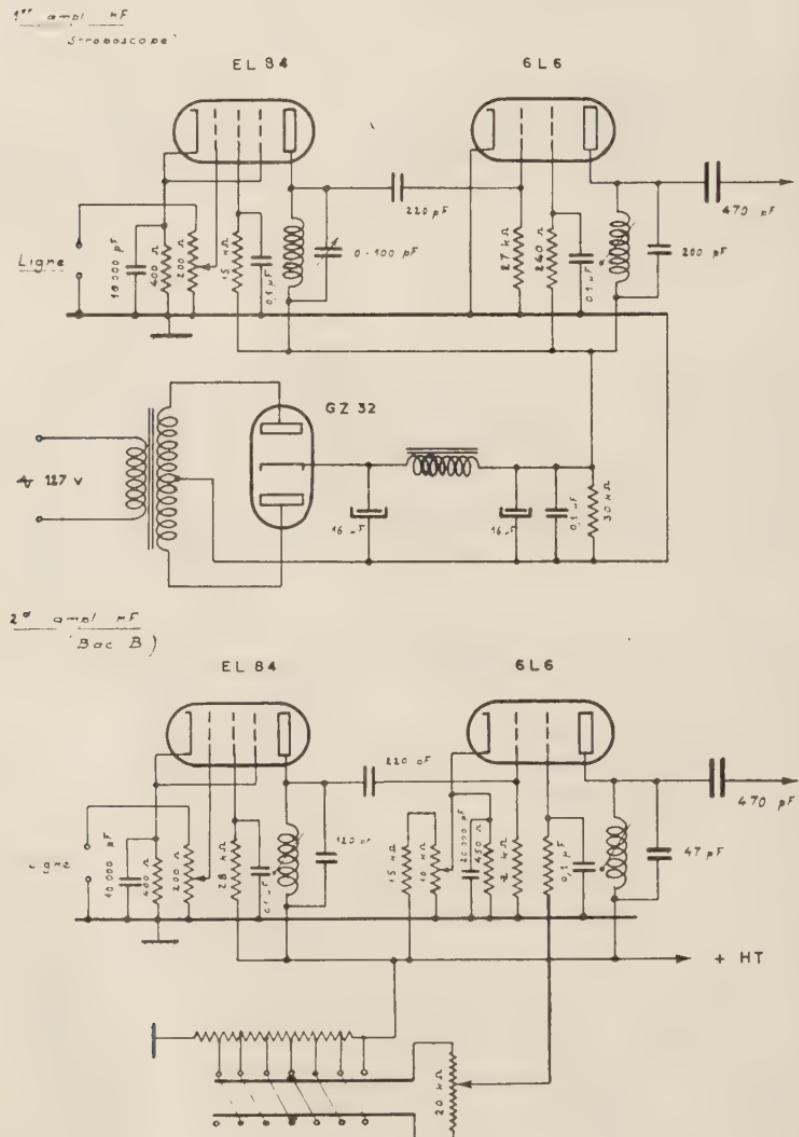


Fig. 8 et 9

## 5 — ESSAIS — PHÉNOMÈNES OBSERVÉS

### *A. Mise au point du stroboscope*

— Le réglage du bac modulateur de lumière A est, de loin, le plus délicat à effectuer, car la « définition » du stroboscope en dépend par le nombre de franges qui doit être maximum-cela exige un parfait réglage du réflecteur d'U.S. R en parallélisme et en distance.

La valeur de cette distance est fonction de la température  $\theta$  de l'eau en vertu de la relation existant entre  $\theta$  et V, vitesse des U.S. dans ce liquide.

— Pour réaliser la mise au point précédente, nous observons le spectre de diffraction au moyen de la lunette astronomique C réglée sur l'infini.

Pour contrôler ce spectre obtenu sur  $F_2$ , lorsque les dispositifs  $L_3$ ,  $F_2$ ,  $L_4$ , et B, sont montés sur le banc, nous utilisons un verre aluminé fixé de façon provisoire entre A et  $L_3$ , disposé à  $45^\circ$  sur le chemin des rayons lumineux et déviant ceux-ci selon une perpendiculaire à l'axe du banc d'optique.

L'image à l'infini est observée à l'aide de la petite lunette d'un cathétomètre, qui permet l'orientation dans toutes les directions.

— Pour une température de l'eau correspondant à la distance D du réflecteur R au quartz, le nombre de franges N est maximum et peut être ajusté au besoin en affinant le réglage de la distance quartz-piston.

Nous avons vérifié par la mesure de N en fonction de la température, que celle-ci doit être obtenue à quelques centièmes de degré près, conformément à la théorie (<sup>6</sup>). d'où la nécessité d'une stabilisation de la température de l'eau.

Le nombre maximum de franges obtenu est de 70. Quant au minimum, il est de l'ordre de 20 à 25.

La valeur de N oscille entre 20 et 70 lorsque l'on passe d'un régime d'onde stationnaire au suivant.

— La puissance ultrasonore utilisée étant faible, la variation de la température de l'eau au cours de nos expériences est très lente, ce qui permet d'obtenir des phénomènes stables durant le laps de temps qui suffit à nos observations.

### B. Franges localisées en onde progressive

— Nous avons vérifié le fonctionnement du modulateur de lumière en éclairant le bac d'étude B, dans lequel le réflecteur avait été remplacé par un absorbant. — Dans ce cas le liquide était parcouru par une onde progressive que l'on visualisait alors par la lunette réglée sur le plan du bac. — Les plans d'onde, alors visibles, disparaissaient lorsqu'on arrêtait la modulation et se déplaçaient pour toute variation de phase. ( $\varphi = |\varphi_A - \varphi_B|$ ).

### C. Franges à l'infini en onde stationnaire

— A l'infini, pour une certaine valeur de  $\varphi$ , nous obtenons un spectre de diffraction identique à celui d'une onde progressive mais dont le nombre de franges est supérieur.

— Théoriquement, pour un déphasage nul, ce qui traduit un maximum de brillance de la source lumineuse lors d'un maximum d'amplitude de l'onde stationnaire (B), et donc une variation de pression  $\Delta p$  max., nous devons obtenir le max. de franges N. L'opposition de phase de l'onde (B) sur (A) soit  $\varphi = \pi$ , doit traduire une extinction d'un certain nombre de franges.

— Expérimentalement, en faisant varier  $\varphi$  de 0 à  $\pi$ , nous avons cru observer visuellement un disparition d'un certain nombre de franges, et vice et versa.

— L'observation en a été rendue difficile par la faible luminosité inhérente au principe de stroboscopie.

Nous avons pensé photographier les images obtenues avec et sans modulation. Le temps de pose nécessaire nous aurait obligé à stabiliser la température à quelques centièmes de degré près, comme l'a montré la théorie (7).

## BIBLIOGRAPHIE

- (1) P. DEBYE et F.W. SEARS, Scattering of light by Supersonic Waves, *Proc. Nat. Acad. Sciences. U.S.* **18**, 410 (1932).
- (2) R. LUCAS et P. BIQUARD, *J. de phys. et Rad.* **3** (1932), 464.
- (3) OTOBIKO NOMOTO, *Bull. de Kobayasi*, Vol. no I, 10 Mars 1951.
- (4) R.C. EXTERMANN et WANNIER, *Helv. Phys. Acta*, **9** (1936) 520.  
R.C. EXTERMANN, *Helv. Phys. Acta*, **10** (1937), 185.
- (5) N. SEGARD et J. POULQUEN, *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, Tome 70, no IV, p. 223-231.  
J. POULQUEN, D.E.S. Fac. des Sciences - Lille - 1957.
- (6) B. TRENTESAUX. D.E.S. Fac. des Sciences - Lille - 1959.
- (7) G. GOUDET. Thèse Fac. des Sciences - Paris 1942.

## Description d'un cryomètre à thermistance et cryométrie par fusion finissante

PAR

PIERRE HUYSKENS, PAUL CLAES (\*) et JEAN-LOUIS GAILLIEZ

### SUMMARY

In the cyometric method of finishing melting, the temperature of the liquid phase differs from that of the crystals, even in the case of pure substances. This situation flows from the role of thermal conductor between the crystals and the warming bath, played by the liquid. When the total area of the crystals remains constant, one can predict an exponential relation between the temperature of the liquid and the time. However, the experimental curves, relative to pure benzene, obtained by means of a thermistor cryometer, shows from this behavior, departures increasing with time. This effect is due to the reduction of the number and of the shape of the crystals.

### I. INTRODUCTION

Dans une monographie récente, Y. Doucet <sup>(1)</sup>, a récapitulé les avantages et les inconvénients des méthodes cinétiques utilisées en cryométrie. La méthode de cristallisation commençante étudie la variation de température en fonction du temps lorsqu'on congèle la solution. Dans la méthode de la fusion finissante au contraire, on détermine l'évolution de la température lorsqu'on réchauffe la solution préalablement congelée. Dans ces deux méthodes, on mesure la température de la phase liquide, qui est différente de celle des cristaux, le liquide servant de conducteur thermique entre les cristaux et le bain extérieur. Dans ce travail, nous précisons le rôle de divers facteurs qui influencent cet écart et nous en déduisons l'allure des courbes de réchauffement. Ces courbes ont été

(\*) Aspirant du F.N.R.S.

<sup>(1)</sup> Y. DOUCET : Techniques Modernes et Applications de la cryométrie. Dunod. Paris 1959.

comparées aux courbes expérimentales relatives au benzène pur obtenues à l'aide d'un cryomètre à thermistance.

## II DESCRIPTION DU CRYOMÈTRE

La fig. 1 est un schéma du cryomètre utilisé. Un mince tube de verre central contient la thermistance fixée par de la paraffine. Nous avons utilisé une thermistance M.B.L.E. à base d'oxydes de

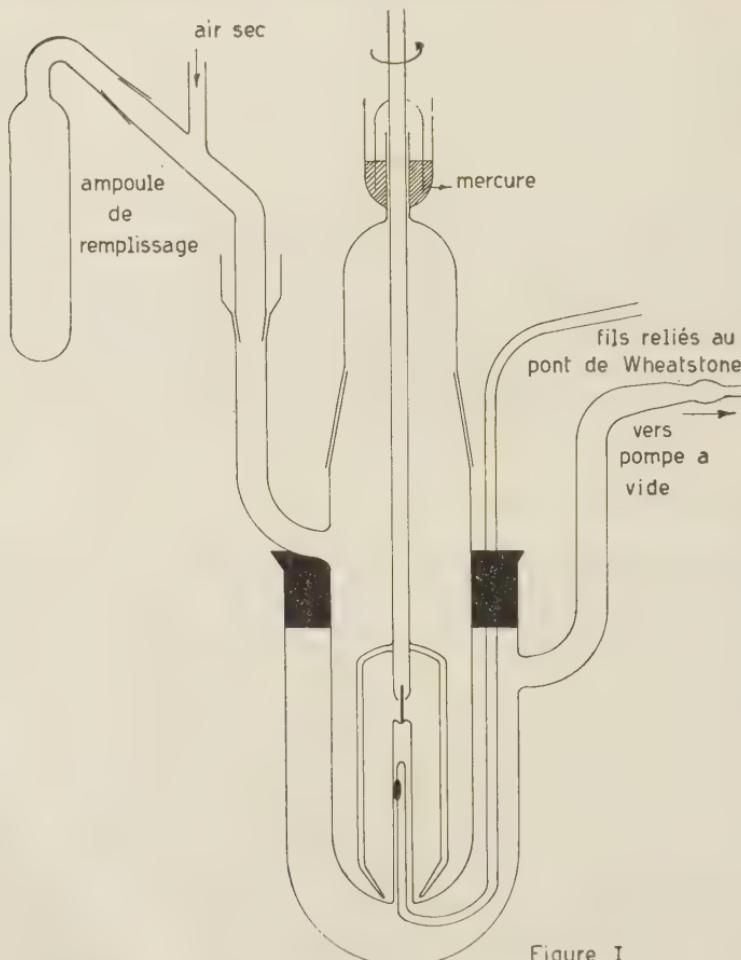


Figure I

fer, de zirconium et de titane d'une résistance nominale de 4.700 ohms à 25°C. Les fils de contact traversent un manchon où l'on fait le vide, dans le but de régulariser les transports de chaleur. Le

cryomètre est équipé d'un agitateur rotatif (250 tours/minute) relié à son moteur par l'intermédiaire d'une valve à mercure. Le remplissage se fait au moyen d'un dispositif à joints rodés qui évite la pollution des liquides par l'humidité atmosphérique.

La résistance du semi-conducteur est mesurée au moyen d'un pont de Wheatstone simple dont l'une des branches comporte les résistances fixes de 4.000 et de 2.000 ohms et l'autre la thermistance et la résistance réglable  $R_2$ . De la sorte, les différences de potentiel aux bornes de la thermistance et aux bornes du pont restent proportionnelles. En vue d'assurer leur constance, indispensable à la reproductibilité des mesures par suite de la dépendance de la résistivité du semi-conducteur vis à vis du potentiel appliqué, nous avons utilisé comme source de courant un élément Weston. Le faible coefficient de température de cet élément et la faiblesse des courants débités donnent une stabilité suffisante à la différence de potentiel. Le balancement du pont est contrôlé par un galvanomètre KIPP d'une sensibilité de  $3.10^{-11}$  Ampère. Lors des mesures, le cryomètre est plongé dans un vase de Dewar contenant le liquide réfrigérant maintenu à température constante. L'agitation s'y fait en insufflant de l'air froid. On suit l'évolution de la résistance  $R_2$  en fonction du temps. Après une surfusion plus ou moins longue, on obtient le palier de cristallisation.

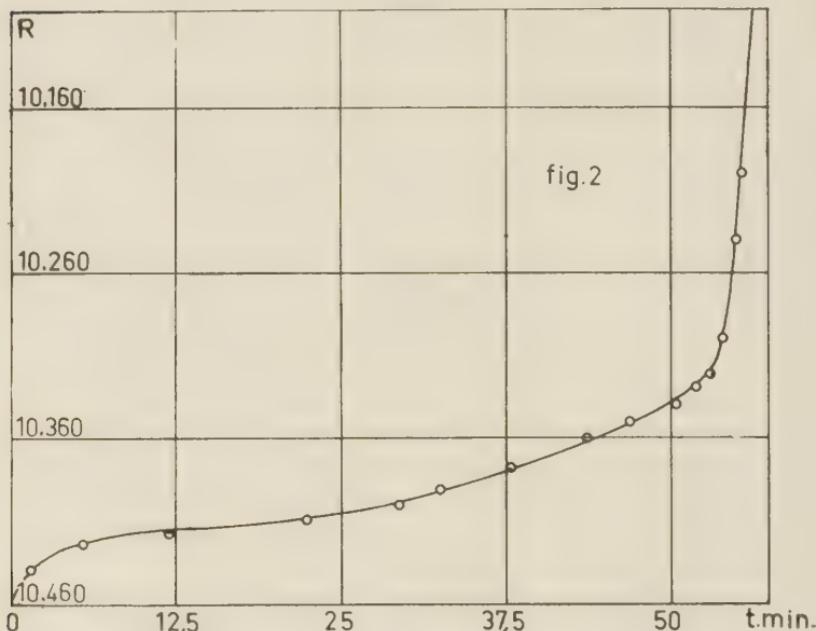
Lorsque la quantité de cristaux est suffisante, on remplace le bain de refroidissement par un bain de réchauffement dont on contrôle également la température. On note la diminution de la résistance en fonction du temps.

Les liquides utilisés, les plus purs fournis par le commerce, ont été soumis à des cristallisations et des distillations fractionnées et à une distillation sous vide. Malgré ces précautions, les paliers de cristallisation présentent encore après un certain temps un léger fléchissement dû à la présence d'impuretés. Les indices de réfraction sont toutefois en excellent accord avec ceux de la littérature.

### III RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Les courbes de réchauffement relatives à une dizaine d'expériences avec le benzène pur présentent toutes l'allure caractéristique de la fig. 2. On constate toutefois que l'écart entre la courbe de réchauffement et le palier de congélation augmente :

1. lorsque la température du bain de réchauffement est plus élevée.
2. lorsqu'on introduit de l'air dans le manchon de protection.
3. lorsque l'agitation est moins rapide.



Les courbes relatives à des expériences avec l'eau et avec le cyclohexane présentent la même allure. Des valeurs de la résistance aux paliers de cristallisation nous avons déduit les constantes caractéristiques de la thermistance utilisée. Cette résistance obéit à la relation :

$$R = A \cdot T^n \cdot \exp \frac{B}{T}$$

En attribuant aux températures de fusion des liquides les valeurs fournies par la littérature (2), on trouve pour les diverses constantes les valeurs :

$$A = 0,7584 \text{ ohms}$$

$$B = 1194,87$$

$$n = 0,25$$

(2) Y. DOUCET, Loc. cit.

## IV DÉDUCTIONS THÉORIQUES

On peut songer à appliquer au phénomène de fusion les idées formulées par Nernst au sujet de la cinétique des réactions hétérogènes. Du fait de l'agitation, la température de la phase liquide est homogène sauf dans une couche d'épaisseur  $x$  au voisinage des cristaux. En première approximation,  $x$  ne dépend que de l'agitation. À travers cette couche, il y a un transport de chaleur par conduction. Soit  $T$  la température de la solution,  $T_0$  celle des cristaux,  $k$  la conductivité thermique de la solution et  $s_i$  la surface du cristal  $i$ . Celui-ci recevra un débit de chaleur donné par la relation :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{ks_i}{x} (T - T_0) \quad (1)$$

La solution reçoit du bain de réchauffement à température  $T_b$  un débit de chaleur :

$$\frac{dQ}{dt} = K(T_b - T) \quad (2)$$

où  $K$  est un coefficient dépendant de la géométrie du cryomètre et de la conduction par le « vacuum jacket ». Ce débit sert à éléver la température de la solution et à fondre les cristaux. De ce fait,

$$\frac{dQ}{dt} = C \frac{dT}{dt} + \frac{k}{x} (T - T_0) \sum s_i \quad (3)$$

Dans cette expression,  $C$  est la capacité calorifique de la solution et  $\sum s_i$  la surface totale des cristaux. Des équations (2) et (3), on déduit :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C} \left[ KT_b - \left( \frac{k}{x} \sum s_i \right) T_0 - \left\{ K + \left( \frac{k}{x} \sum s_i \right) \right\} T \right] \quad (4)$$

Lorsqu'on atteint un palier de température, on a :

$$\frac{dT}{dt} = 0 \quad (5)$$

La température  $T_p$  correspondant à ce palier obéit à la relation :

$$T_p = \frac{KT_b + \left( \frac{k}{x} \sum s_i \right) T_0}{K + \left( \frac{k}{x} \sum s_i \right)} \quad (6)$$

On voit donc que l'écart de la température du palier par rapport à celle des cristaux est d'autant plus faible :

1. que  $T_b$  est plus proche de  $T_0$ . On a donc avantage à maintenir la température du bain de réchauffement le plus près possible du point de fusion.

2. que  $K$  est plus faible. La température du palier ce rapprochera d'autant plus du point de fusion que le réchauffement a lieu plus lentement. C'est ce qui explique la différence constatée lorsque le manchon est rempli d'air.

3. que  $x$  est plus petit. On a donc intérêt à rendre l'agitation la plus efficace possible.

4. que  $\sum s_i$ , la surface totale présentée par les cristaux est plus importante. Celle-ci dépend du nombre de cristaux et de leur taille moyenne. On note ici une différence essentielle entre les deux méthodes cinétiques. Dans la méthode de refroidissement, la surface des cristaux ne fait qu'augmenter, si bien que, pour un corps parfaitement pur, la température du liquide se rapprochera de plus en plus de celle des cristaux. Ce fait doit être à l'origine de la légère remontée de température que nous avons constatée dans certains cas, après l'apparition des premiers cristaux, dans la congélation de l'eau pure. (La diminution subséquente est due à la présence d'impuretés). Dans la méthode de réchauffement au contraire, le nombre et la surface des cristaux ne font que diminuer au cours du temps et la température du liquide s'écarte de plus en plus de celle des cristaux.

Considérons le cas où le terme  $\sum s_i$  est approximativement constant. C'est rigoureusement le cas de cristaux suffisamment anisotropes pour que leur fusion ne progresse que suivant un axe, et où l'apport de chaleur à ces cristaux se ferait par l'intermédiaire d'une surface invariable. L'intégration de l'équation (4) donne dans ce cas :

$$T = \frac{KT_b + \left( \frac{k}{x} \sum s_i \right) T_0}{K + \frac{k}{x} \sum s_i} - \frac{K(T_b - T_0)}{K + \frac{k}{x} \sum s_i} \exp. - \left( \frac{K + \frac{k}{x} \sum s_i}{C} \right) t \quad (7)$$

Dans cette expression, le temps est compté à partir du moment où la solution présente la température des cristaux. Si l'on confronte

l'équation précédente avec les courbes expérimentales, on constate qu'elle rend assez bien compte de l'allure de celles-ci au début du réchauffement. Après un certain temps toutefois la température continue à s'élever au lieu de tendre vers la valeur du palier prévue par l'équation. Ce phénomène est dû à la diminution de la surface totale des cristaux et, dans certains cas, à l'augmentation de K par suite de la disparition progressive du manchon de glace qui peut s'être formé le long des parois du cryomètre. Il est en partie responsable des écarts constatés par Doucet et Bizouard (3) entre les résultats de la méthode d'équilibre et ceux de la cryométrie par fusion finissante.

## V CONCLUSIONS

L'allure exponentielle des courbes telle qu'on pourrait la prévoir lorsque la surface totale des cristaux reste constante, n'est vérifiée qu'au début du réchauffement. Les écarts ultérieurs sont dus en ordre principal à la diminution du nombre et des dimensions des cristaux. Cet effet rend la technique de la fusion finissante difficilement applicable comme méthode de précision en cryométrie.

Les auteurs remercient le Fonds National de la Recherche Scientifique, dont les subsides ont permis l'élaboration de ce travail.

UNIVERSITÉ DE LOUVAIN  
*Laboratoire de Chimie Physique*

(3) *Journ. Chim. Phys.* (1955) 52, 749.

## L'Influence de la température sur les photomultiplicateurs

PAR

M. LONTIE-BAILLIEZ et A. MEESSEN  
Centre de Physique Nucléaire, Université de Louvain

### ABSTRACT

The temperature dependency of photocathode and dynode efficiency has been measured separately at 6000, 5500, 5000 and 4500 Å. Combining this with all known results, we have determined a curve for the wavelength dependency of the SbCs<sub>3</sub> photocathode temperature coefficient, from 2500 to 7000 Å. This coefficient changes sign at 5500 Å. It is of the order of  $-0,25\%/{\circ}\text{C}$  for  $\lambda \leq 5000$  Å but rises sharply for  $\lambda \geq 5500$  Å.

The dynodes have always a negative temperature coefficient, fluctuating around  $-0,40\%/{\circ}\text{C}$ . This fact can be understood by the decrease of surface charges when the temperature of the semiconductor rises.

### INTRODUCTION

La plupart des expérimentateurs qui utilisent des compteurs à scintillations en physique nucléaire, ont supposé implicitement que leur système de détection était indépendant de la température, au moins dans le domaine des températures ordinaires. On sait que les composés Sb-Cs des photomultiplicateurs s'évaporent vers  $+75^{\circ}\text{C}$  et que l'efficience est fortement diminuée à basse température. Mais il existe un effet de température dans le domaine des températures normales aussi.

Nous avions déjà attiré l'attention sur une distinction entre un effet de température du scintillateur et un effet de tempéarture de la photocathode et des dynodes du photomultiplicateur (1). Comme scintillateur nous avions analysé plus particulièrement le NaI:Tl, dont l'intensité et le spectre d'émission varie avec la température (2). Dans le même article nous avions suggéré, en revoyant les résultats expérimentaux de différents auteurs (3) à (9),

qu'il y a une variation systématique du coefficient de température de la photocathode en fonction de la longueur d'onde de la lumière incidente.

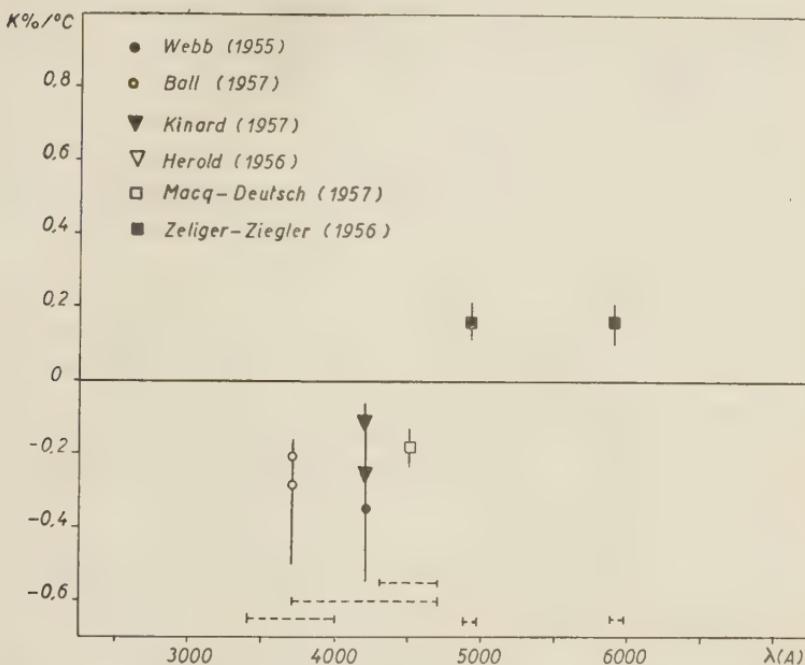


Fig. 1 — Le coefficient de température global de photomultiplicateurs en fonction de la longueur d'onde de la lumière incidente.

Ces résultats sont repris à la figure 1, où nous avons reporté le coefficient de température

$$K = \frac{1}{i} \frac{di}{dT} \quad \text{en \%/\textdegree C}$$

qui est normalisé avec la valeur de  $i$  à température normale, soit 20°C. Les traits interrompus horizontaux indiquent la largeur des différentes bandes spectrales utilisées. On peut y ajouter la mesure de Beyster et all. (10) qui trouvent un coefficient de  $-0,5\%/\textdegree C$  pour le spectre du NaI:Tl centré à 4100 Å. Toutes ces mesures concernent l'ensemble du photomultiplicateur; Kinard était le premier qui a essayé de séparer l'effet de température des dynodes et de la photocathode; il indiquait que l'effet de température des dynodes était prépondérant.

Le courant photoélectrique à l'anode d'un photomultiplicateur peut s'écrire

$$i(\lambda, T) = I(\lambda) \cdot \varepsilon(\lambda, T) \cdot s(T)^r$$

où  $I(\lambda)$  représente l'intensité de la lumière incidente,  $\varepsilon(\lambda, T)$  : l'efficience de la photocathode,  $s(T)$  : le coefficient de multiplication par dynode, et enfin  $r$  : le nombre de dynodes. Dans ce cas le coefficient de température total sera

$$K = K_\varepsilon + K_d, \text{ avec } K_d = r K_s$$

où  $K_\varepsilon = (d\varepsilon/dT)/\varepsilon$  est le coefficient de température de la photocathode et où  $K_s = (ds/dT)/s$  est celui d'un étage de multiplication secondaire.

Le but de la présente expérience, commencée déjà en 1957 (11), était 1) de mesurer séparément  $K_\varepsilon$  et  $K_d$ . Pour cela nous avons mesuré la variation du courant anodique, en changeant soit la température des dynodes, soit celle de la photocathode entre 0 et 60°C, en maintenant l'autre température constante à 15°C.

2) déterminer la dépendance de la longueur d'onde du coefficient  $K_\varepsilon(\lambda)$  afin de confirmer notre proposition précédente et afin d'avoir des bases expérimentales pour une théorie de l'effet photoélectrique du semiconducteur  $SbCs_3$ . Pour cela nous utilisons une lumière monochromatisée à 6000, 5500, 5000 et 4500 Å, qui tombe toujours au même point de la photocathode. Nos mesures n'ont porté que sur des photomultiplicateurs RCA 5819.

Les mesures de Laustriat et Coche (12), sur des photomultiplicateurs DuMont 6292 et RCA 6342 entre -40 et +40°C, aboutissaient à un coefficient global variant entre -0,1 et -0,7 %/°C. Ceci paraissait être déterminé entièrement par les dynodes. Un peu plus tard ces mêmes auteurs (13) sont cependant arrivés à distinguer l'effet de température de la photocathode de l'effet de température des dynodes. Ils ont pour cela mesuré simultanément le courant anodique et le courant cathodique d'un photomultiplicateur à -30° et à +20°C. La longueur d'onde variait de 3500 à 6500 Å.

La dépendance de l'effet de température de la photocathode de la longueur d'onde incidente, est confirmée encore par des mesures directes sur des cellules photoélectriques au  $SbCs_3$ , d'après les résultats de Schaetti et Baumgartner (14), Khazanov et Yurov (15), Miyazawa (16), Naroy (17) et Spicer (18). Certains de ces auteurs ont effectué des mesures à basse température (14, 17, 18).

## DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

Le dispositif expérimental est représenté schématiquement à la figure 2. La source est constituée d'une lampe de projection Philips 500W, à filament de Tungstène, dont on contrôle l'intensité lumineuse et la température de couleur, fixée à 2650°K. Après focalisation cette lumière est pulsée par un disque à 60 fentes radiales, tournant à 2750 tr/min. La lumière est monochromatisée par un spectrographe Krüss, dont la courbe de dispersion a été soigneusement établie au moyen des raies d'une lampe à mercure. Afin d'éviter les raies parasites, le faisceau lumineux doit être préservé de toute réflexion et de la lumière extérieure ayant d'autres angles d'incidence.

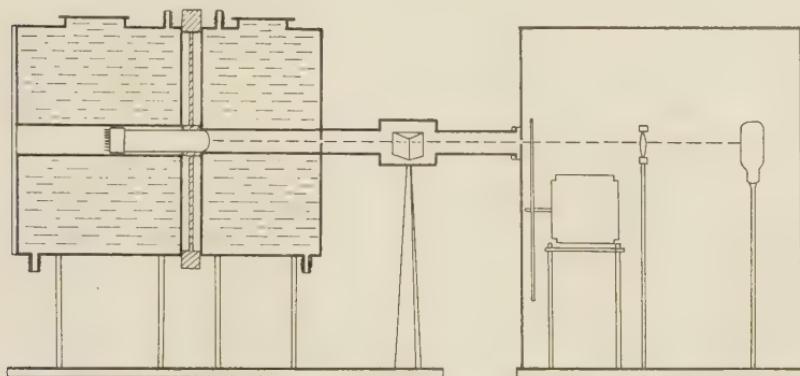


Fig. 2 — Vue schématique du dispositif expérimental utilisé.

Pour varier indépendamment la température de la photocathode et des dynodes du photomultiplicateur, nous créons deux chambres thermiques indépendantes. L'air de ces chambres est maintenu à une température fixe par une enveloppe en cuivre contenant les divers mélanges thermiques. Les températures supérieures ou égales à 15°C sont obtenues par un courant d'eau chauffée, les températures plus basses sont obtenues en introduisant des mélanges réfrigérants par l'ouverture supérieure. L'isolation thermique entre les deux parties est réalisée par un disque en plexiglas d'un cm d'épaisseur, évidé à l'intérieur, permettant d'y faire le vide. On peut produire ainsi des gradients de 150°C/cm. La chambre thermique de la photocathode est fermée à l'avant par la fente du spectrographe, celle des dynodes est fermée à l'arrière par une plaque

qui ne permet que le passage des câbles du photomultiplicateur et du cathodesfollower. L'air de ces chambres est éventuellement séché par du  $\text{CaCl}_2$  pour éviter les condensations indésirables. La température des deux chambres est mesurée à  $\pm 0,5^\circ\text{C}$  près par un ensemble de dix thermocouples au Chromel-Alumel.

Le photomultiplicateur, son système thermique et le bras du spectromètre tournent solidairement autour de l'axe central du spectromètre, la lumière tombe donc toujours bien au même endroit de la photocathode. La hauteur des impulsions électriques obtenues à la sortie du photomultiplicateur peut être mesurée par un analyseur différentiel ou même directement au galvanomètre. Ces deux procédés sont équivalents quand le bruit de fond est négligeable par rapport aux impulsions à analyser.

## LES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

### 1. *L'effet de température des dynodes*

Le coefficient de température des dynodes a été mesuré pour quatre tubes RCA 5819. La température de la photocathode était fixée à  $15^\circ\text{C}$  et celle des dynodes variait de 0 à  $+80^\circ\text{C}$ . On observe que la variation est quasi linéaire dans le domaine de température considéré. Sur la figure 3 on peut voir les points obtenus pour un des quatre tubes. Les quatre coefficients trouvés sont respectivement.

$$K_d = -0,45 \pm 0,05\%/\text{°C}$$

$$K_d = -0,50 \pm 0,05\%/\text{°C}$$

$$K_d = -0,51 \pm 0,05\%/\text{°C}$$

$$K_d = -0,051 \pm 0,05\%/\text{°C}.$$

Notons cependant que nous avions obtenu en 1958 pour un autre tube un coefficient supérieur à  $-1\%/\text{°C}$  (11).

Ces autres mesures ci-dessus correspondent à 5750 Å et une tension de 900 Volts appliquée au phototube. Mais nous avons vérifié 1) que  $K_d$  est indépendant de la longueur d'onde et 2) que  $K_d$  est inchangé pour 800, 900 et 1000 Volts dans le domaine de température étudié. Ceci est confirmé aussi par d'autres auteurs (6,13). Nous avons vérifié aussi la reproductibilité à quelques heures et quelques jours d'intervalle, ainsi que l'absence d'hystéresis pour le réchauffement et le refroidissement des dynodes.

## 2. L'effet de température de la photocathode

Nous avons mesuré sur deux photomultiplicateurs RCA 5819 et à 6000, 5500, 5000 et 4500 A l'effet de température de la photocathode. La température des dynodes était fixée à 15°C et celle de la photocathode variait entre 0 et 60°C. Les points expérimentaux obtenus pour un des tubes sont représentés sur la figure 3. Pour

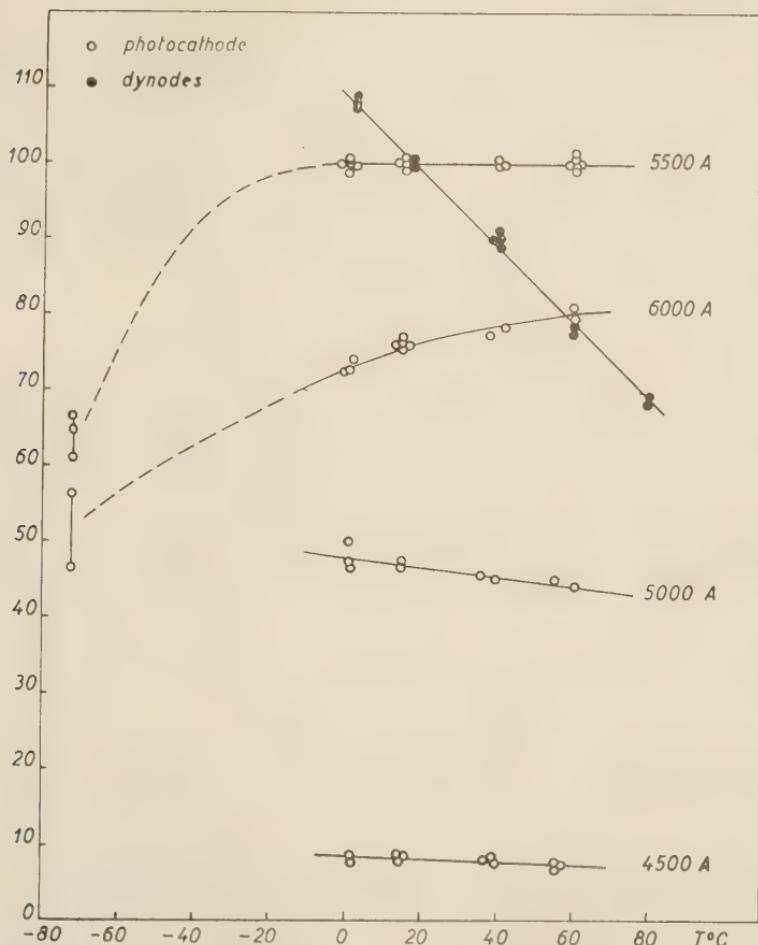


Fig. 3 — Dépendance de la température, mesurée pour les dynodes et la photocathode d'un tube RCA 5819.

ce tube nous avons fait aussi quelques mesures à - 72°C. Voici les coefficients ainsi obtenus :

6000 A	$K_e = 0,20 \pm 0,10\%/\text{°C}$	$K_e = 0,50 \pm 0,10\%/\text{°C}$
5500 A	$K_e = 0 \pm 0,05\%/\text{°C}$	$K_e = 0 \pm 0,05\%/\text{°C}$
5000 A	$K_e = -0,14 \pm 0,07\%/\text{°C}$	$K_e = -0,45 \pm 0,10\%/\text{°C}$
4500 A	$K_e = -0,20 \pm 0,10\%/\text{°C}$	

L'efficience de la photocathode tombe à 65% de celle qu'on a à +20°C, quand on descend à -72°C.

### 3. *Effets irréversibles*

Des transformations irréversibles peuvent se produire quand on chauffe le tube jusqu'à évaporation partielle des surfaces SbCs<sub>3</sub>. Le constructeur indique une température maximum de +75°C. Nous avons observé cet effet pour plusieurs des tubes étudiés. Un tube dont les dynodes étaient chauffées à +80°C avait perdu 37% de sa sensibilité initiale quand il était de nouveau ramené à 15°C. Pour la photocathode d'un autre tube le même effet s'est produit après avoir été chauffé à +60°C.

### 4. *Effet de fatigue*

Nous avons constaté à plusieurs reprises un effet de fatigue qui se produit chaque fois qu'un tube est remis en fonctionnement après un arrêt de quelques heures. Dans quatre mesures nous avons trouvé les valeurs suivantes pour la décroissance entre le courant initial et le courant de régime atteint après deux ou trois heures : 64, 65, 74 et 93% respectivement.

## DISCUSSION DES RÉSULTATS

### 1. *L'effet de température de la photocathode*

Sur la figure 4 nous avons indiqué les coefficients K<sub>e</sub> calculés d'après les résultats expérimentaux connus. Rappelons que les résultats de Schaetti et Baumgartner (14), Khazanov et Yurov (15), Miyazawa (16) et Naroy (17) proviennent de mesures directes sur des photocathodes de cellules photoélectriques. Celles de Coche et Laustriat (18) et les nôtres sont faites avec des photomultiplieurs où on a éliminé l'effet de température des dynodes. La figure 4 montre une situation assez confuse, et beaucoup de résultats semblent se placer sur une courbe différente de celle de Khazanov et Yurov et de nos propres résultats. En fait cette situation n'est

qu'apparente, puisque les derniers coefficients sont obtenus avec la tangente et des points expérimentaux répartis entre  $-20$  et  $+60^{\circ}\text{C}$

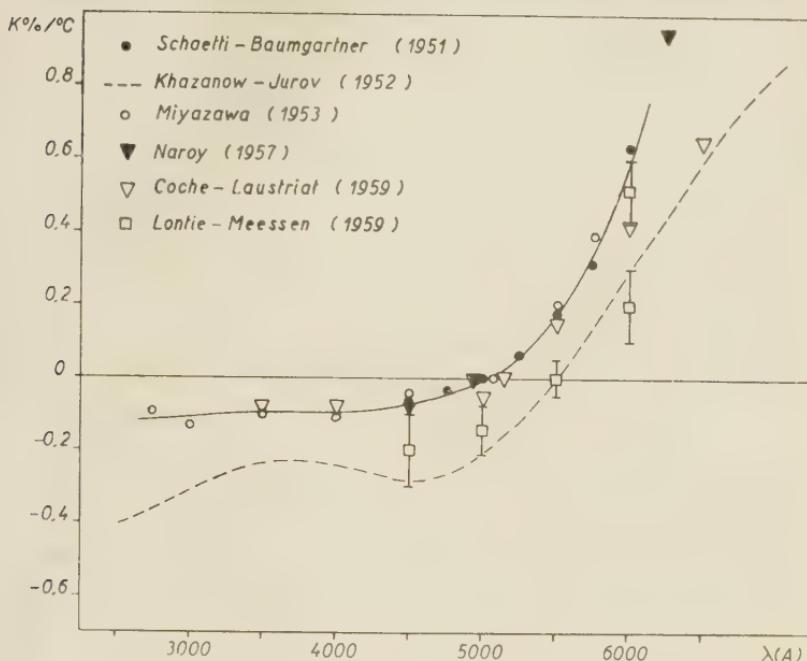


Fig. 4 — Première estimation de la variation du coefficient de température de la photocathode  $\text{SbCs}_5$  avec la longueur d'onde de la lumière incidente.

tandis que les autres coefficients sont obtenus à partir de deux points seulement :

- +20 et  $-110^{\circ}\text{C}$  chez Schaetti et Baumgartner
- +20 et  $-13^{\circ}\text{C}$  chez Naroy
- +20 et  $-100^{\circ}\text{C}$  chez Miyazawa
- +20 et  $-30^{\circ}\text{C}$  chez Coche et Laustriat.

Afin d'éviter cette erreur nous avons reporté ensuite tous les points expérimentaux connus concernant la variation de l'efficience de la photocathode en fonction de la température pour 6000, 5500, 5000 et 4500 Å sur les figures 5 et 6. On voit ainsi que nos résultats enveloppent très bien les résultats de Khazanov et Yurov dans le même domaine de température.

Remarquons le désaccord entre les mesures de Miyazawa et Schaetti Baumgartner, à  $-195^{\circ}\text{C}$ . Miyazawa observe même une

augmentation de sensibilité de 13 % à 4500 Å, tandis que Schaetti et Baumgartner trouvent une diminution de 40 %. Nous avons cependant tracé une courbe descendante à basses températures,

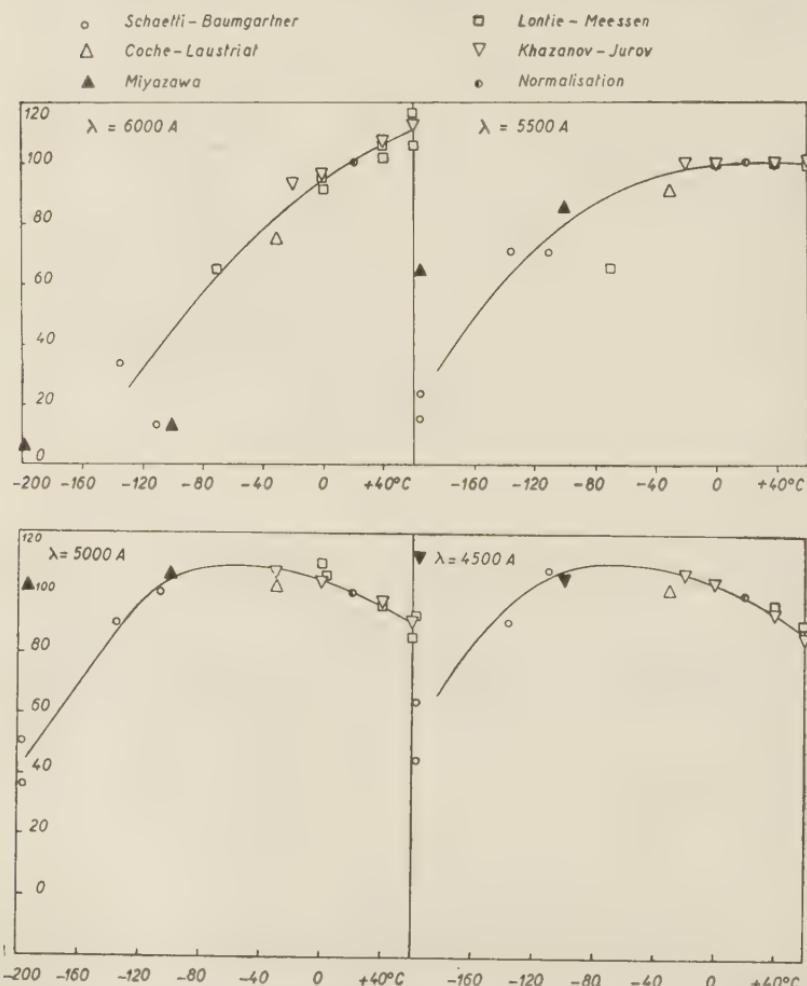


Fig. 5 et Fig. 6 — Les points expérimentaux connus pour la variation de l'efficience de la photocathode avec la température à 6000, 5500, 5000 et 4500.

puisque la diminution d'efficience en dessous de  $-150^\circ\text{C}$  est bien connue (19). Cela est confirmé aussi par les mesures de Naroy : à 6250 Å il trouve que l'efficience décroît continûment de 100 % à 30 % quand on passe de  $+20$  à  $-130^\circ\text{C}$ . À 4925 Å, l'efficience

est constante entre  $+20$  et  $-130^{\circ}\text{C}$  mais tombe brusquement à  $36\%$  entre  $-130$  et  $-150^{\circ}\text{C}$ .

L'explication de la diminution de l'efficience à basse température serait due, d'après certains auteurs (<sup>19</sup>), à une augmentation de la résistance de la photocathode à basse température; par suite la tension entre cathode et première dynode diminuerait. Ceci n'exclut pas un effet de température du processus interne d'émission photoélectrique du semiconducteur, qui sera certainement responsable des variations à température normale.

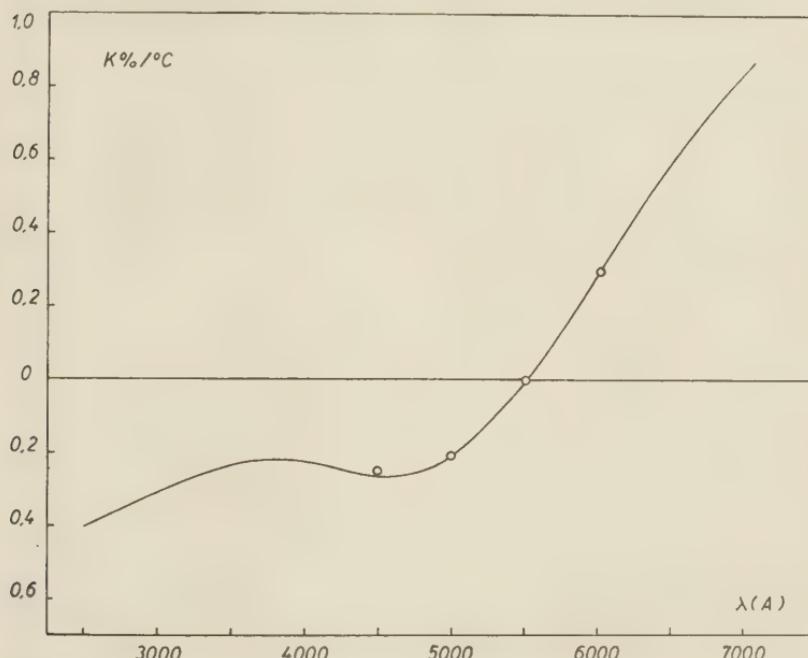


Fig. 7 — Variation du coefficient de température de la photocathode  $\text{SbCs}_3$  avec la longeur d'onde de la lumière incidente.

Nous pouvons maintenant calculer le coefficient de température  $K_e$  moyen, d'après la tangente à la courbe moyenne autour de  $20^{\circ}\text{C}$ , des figures 5 et 6. Ces coefficients pour 6000, 5500, 5000 4500 Å sont reportés dans la figure 7 en même temps que la courbe obtenue d'après les mesures de Khazanov et Yurov entre 2500 et 7500 Å pour  $-20$ ,  $0$ ,  $+20$ ,  $+40$ , et  $+60^{\circ}\text{C}$ . Il y a bon accord. La courbe de la figure 7 peut donc être considérée comme une représentation très satisfaisante de la variation du coefficient de

température  $K_\varepsilon$  avec la longueur d'onde de la lumière incidente. Ceci confirme l'idée du changement de signe de  $K_\varepsilon$ , exprimée déjà précédemment (1).

## 2. L'effet de température des dynodes

La figure 8 résume les résultats expérimentaux connus sur l'effet de température des dynodes. Les dynodes des tubes RCA sont constituées de  $SbCs_3$ , tandis que celles des tubes DuMont et AVP (électrotechnique) sont en Ag-Mg. Les points déduits des mesures de Kinard sont obtenus en supposant  $K = -0,25\%/\text{°C}$  pour la photocathode à 4000 A (NaI:Tl).

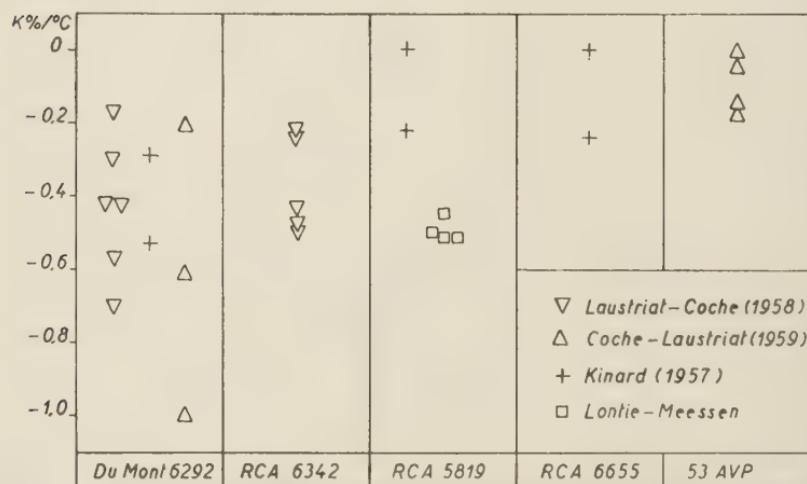


Fig. 8 — Les points expérimentaux connus pour le coefficient de température des dynodes des différents photomultiplicateurs.

En supposant pour les dynodes un coefficient moyen  $K_d = -0,4\%/\text{°C}$  on obtient pour le coefficient de température moyen par étage de multiplication secondaire ( $r = 10$ ) :  $K_s = -0,04\%/\text{°C}$ .

D'après Timoféev (20), la multiplication secondaire est plus grande pour les isolants et semiconducteurs que pour les métaux, à cause de la création de charges électriques superficielles. Celles-ci proviennent de l'extraction des électrons et de la faible conductibilité électrique de ces matières. Le passage des électrons à travers la surface est facilité par la présence des champs accélérateurs ainsi créés.

D'après ce modèle, il est facile de donner une explication de l'effet de température dans l'émission secondaire des semiconducteurs. En effet la conductibilité de ceux-ci augmente avec la température. Les charges spatiales se forment donc de plus en plus difficilement. Le coefficient de température doit donc être négatif.

Sur la figure 20 nous avons indiqué la variation du coefficient de multiplication secondaire  $s$  en fonction de l'énergie des électrons incidents, pour le  $SbCs_3$  et le  $Ag-Mg$ . On y trouve aussi les courbes correspondantes pour le  $KCl$  à  $+20$ ,  $+200$  et  $+300^\circ C$ , d'après les mesures de Knoll et all. (21). Pour le  $KCl$  à  $300$  Volts on a un coefficient d'environ  $-0,03\%/\text{ }^\circ C$ .

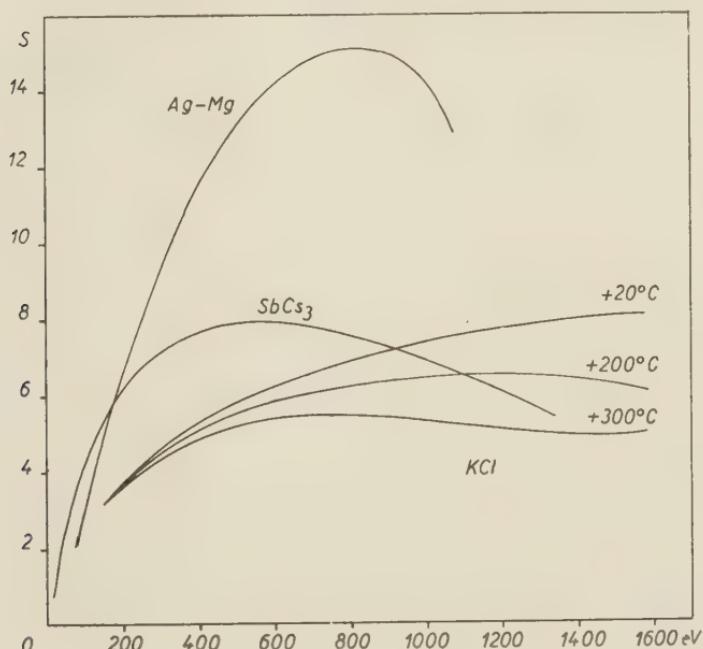


Fig. 9 — Courbes du coefficient de multiplication secondaire des dynodes  $SbCs_3$  et  $Ag-Mg$ , ainsi que la dépendance de la température de ces courbes pour le  $KCl$ .

## CONCLUSION

Nous avons donc pu séparer l'effet de température de la photocathode de l'effet de température des dynodes et déterminer

la dépendance de la longueur d'onde du coefficient de température de la photocathode  $SbCs_3$ .

Puisque  $\lambda > 5000 \text{ \AA}$  pour les scintillateurs ordinaires, nous aurons un coefficient de température globale du photomultiplicateur  $K$  compris entre  $-0,2$  et  $-0,8\%$  / $^{\circ}\text{C}$ . L'efficience globale du tube augmente d'environ  $20\%$  en refroidissant jusqu'à  $-20^{\circ}\text{C}$  et d'environ  $40\%$  en refroidissant à  $-78^{\circ}\text{C}$ . La figure 6 montre qu'on peut refroidir le tube sans perte d'efficience jusqu'à  $-120^{\circ}\text{C}$ . On sait qu'un tel refroidissement aurait aussi la conséquence heureuse d'une diminution notable du bruit de fond thermoionique.

Nous remercions Mr le professeur de Hemptinne, directeur de l'Institut, pour ses nombreux conseils et encouragements durant ce travail. Nous remercions aussi l'Institut Interuniversitaire des Sciences Nucléaires, pour l'octroi d'une bourse de perfectionnement à M. Lontie-Bailliez. Nous remercions le personnel de l'atelier pour les réalisations techniques.

#### BIBLIOGRAPHIE

- (<sup>1</sup>) MEESSEN A. *Journ. Phys. Rad.* 19, 437 (1958).
- (<sup>2</sup>) MEESSEN A. Thèse, Univ. Louvain (1955).
- (<sup>3</sup>) BALL W.P., BOOTH, MC GREGOR. *Nucl. Instr.* 1, 71 (1957).
- (<sup>4</sup>) WEBB L.A. *U.S.N.R.D.L. Tr.* 48 (1955).
- (<sup>5</sup>) HEROLD, KROPP and STUTHEIT. E.I. du Pont de Nemours D.P. 47, (1956).
- (<sup>6</sup>) KINARD F.E. *Nucleonics*, 15, April, 92, (1957).
- (<sup>7</sup>) MACQ et DEUTSCH, *Ann. Soc. Sc. Bruxelles*, 71, 172 (1957).
- (<sup>8</sup>) KELLEY and GOODRICH, *Phys. Rev.* 77, 138, (1950).
- (<sup>9</sup>) SELIGER and ZIEGLER, *Nucleonics*, 14, April 49 (1956).
- (<sup>10</sup>) BEYSTER, HENKEL, NOBLES, KISTER, *Phys. Rev.* 98, 1216, (1955).
- (<sup>11</sup>) BAILLIEZ M. (Mme LONTIE), Thèse, Univ. Louvain, (1958).
- (<sup>12</sup>) LAUSTRIAT et COCHE, *Journ. Phys. Rad.* 19, 927, (1958).
- (<sup>13</sup>) COCHE et LAUSTRIAT, *Journ. Phys. Rad.* 20, 719, (1959).
- (<sup>14</sup>) SCHÄTTI et BAUMGARTNER, *Helv. Phys. Acta*, 24, 614, (1951).
- (<sup>15</sup>) KHAZANOV et YUROV. *Zh. Tech. Fiz.* 22, 744, (1952).
- (<sup>16</sup>) MIYAZAWA H. *Journ. Phys. Soc. Japan*, 8, 169, (1953).
- (<sup>17</sup>) NAROY Z. *Ann. Phys.* 20, 386, (1957).
- (<sup>18</sup>) SPICER W.E. *Phys. Rev.* 112, 114, (1958).
- (<sup>19</sup>) MOTT W. and SUTTON, *Hdb. of Phys.* Berlin, 45, 93, (1958).
- (<sup>20</sup>) TIMOFEEV. *Zh. Tech. Fiz.* 10, 8, (1940).
- (<sup>21</sup>) KNOLL, HACHENBERG, RANDMER, *Z. Physik*, 122, 137, (1944).

## Table des solubilités des sels usuels à l'usage du chimiste praticien

PAR

ROBERT DELHEZ  
Assistant à l'Université de Liège

### INTRODUCTION

Qu'il s'occupe à des travaux de recherche ou de routine, c'est bien souvent que le chimiste de laboratoire se trouve dans la nécessité de connaître, avec une précision suffisante, la solubilité de tel ou tel sel.

S'il se fie alors à quelque compilation hâtive, une indication erronée gâte le fruit de son travail. S'il consulte un ouvrage physico-chimique, il trouve un chiffre exprimé en unités qui ne sont guère commodes que pour le seul théoricien; d'où de longs calculs, qui suspendent les manipulations et dérangent l'horaire le mieux concerté.

Quant au débutant, à quelles erreurs de jugement n'est-il pas exposé, si des données quantitatives ne viennent tôt lui apprendre de quel coefficient de relativité les auteurs affectent l'épithète *soluble* et ses degrés de signification !

Ces sont ces considérations, suggérées par notre travail personnel, comme par la direction des exercices pratiques des étudiants, qui font à nos yeux l'intérêt de la *table* présente.

### MATIÈRE

Le caractère tout pratique de notre propos nous a conduit à indiquer, exprimée en grammes *par 100 cm<sup>3</sup> d'eau* pour la température de 20°C, la solubilité des sels dont use fréquemment de nos jours l'inorganicien, sous leur état *usuel* d'hydratation.

Par « état usuel d'hydratation », nous entendons celui que

présentent les produits de l'industrie ou les substances obtenues au laboratoire dans les circonstances ordinaires de cristallisation. Pour les sels qui possèdent une température de transition d'un hydrate à un autre voisine de 20°, nous mentionnons ces deux hydrates.

Sauf indication contraire, il s'agit toujours des sels *normaux* des acides *ortho*. Le terme « tartrate » désigne le mélange racémique.

Enfin, dans le cas où nos sources faisaient état d'une influence du pH, nous avons retenu le chiffre correspondant à la neutralité.

## ORDONNANCE ET NOTATION

Les sels sont groupés par anion, et les anions disposés dans l'ordre alphabétique, qui est aussi celui des cations sous chaque anion. Chaque sel est alors désigné par le symbole chimique de l'élément métallique, éventuellement suivi du nombre de Stock entre parenthèses, puis du nombre de molécules d'eau. Parmi ces dernières, nous n'avons pas introduit de distinction fondée sur leur position et leur rôle dans le réseau cristallin.

*Exemple* : sous la rubrique « sulfates », Cu (II). 5 représente  $[\text{Cu}(\text{H}_2\text{O})_4]\text{SO}_4 \cdot \text{H}_2\text{O}$ .

Dans certains cas, la formule complète a été indiquée pour prévenir toute équivoque.

Un astérisque précède les chiffres obtenus par interpolation graphique. Lorsque la solubilité d'un sel n'est connue qu'à une température sensiblement différente de 20°, cette température est mise en indice inférieur.

## SOURCES

Les *Solubilities* de Seidell<sup>(1)</sup> furent notre principale source de données brutes. Dans les cas douteux et pour les travaux postérieurs à la publication de cet ouvrage, nous avons consulté

<sup>(1)</sup> SEIDELL (A.), Solubilities of inorganic and metal organic compounds, 3rd ed., Vol. I. New York, D. Van Nostrand Co, Inc, 1940.

SEIDELL (A.) et LINKE (W.F.), Solubilities of inorganic and organic compounds. Supplement to the 3rd ed. New York, D. Van Nostrand Co, Inc (1952).

les mémoires originaux; nous en donnons la référence à la fin de ce travail (2).

\* \* \*

Le concours dévoué de Melle Berthe Ghaye a beaucoup hâté la publication de ce travail : il nous est agréable de lui témoigner ici notre reconnaissance.

UNIVERSITÉ DE LIÈGE  
*Service de Chimie générale et physique*  
 Avril 1959.

ACETATES

Ag	1,04	La.1,5	22,1
Ba.1	*86,19	Li.2	*64,7
Ba.3	*98,94	Mg.4	*125,4
Ca.1	40,2	Na	46,5
Ce(III).1,5	21,5 <sub>15</sub> °	Na.3	100,7
Cu(II).1	8,07 <sub>25</sub> °	Pb(II).3	55,5
Hg(I)	0,1024 <sup>a</sup>	Sr. <sub>1</sub> <sup>2</sup>	43,5
Hg(II)	25 <sub>10</sub> °	UO <sub>2</sub> .2	8,6
K	255,6		

ARSENİATES

Ag	8,5.10 <sup>-4</sup>	K.7	294,8 <sup>b</sup>
Ba	5,5.10 <sup>-2</sup>	Na.12	21,1 <sub>1,7</sub> °
Ca	12,5.10 <sup>-3</sup>	Sr	2,7.10 <sup>-2</sup> <sub>1,7</sub> °

BORATES

AgBO <sub>2</sub>	0,91 <sub>25</sub> °	NaBO <sub>2</sub> .8	128,46
LiBO <sub>2</sub> .8	9,132	Na <sub>2</sub> B <sub>4</sub> O <sub>7</sub> .10	5,1375

BROMATES

Ag	0,1586	Na	36,407
Ba.1	0,6862	Ni.6	39,97
K	6,9	Pb(II)	1,606 <sub>25</sub> °
La.9	362,9	Sr	30,9
Li.1	268,41 <sub>25</sub> °	Tl	0,3474

(2) Le renvoi à cette bibliographie est indiqué par une lettre placée en haut et à droite du chiffre de solubilité ou du nom de l'anion.

### BROMURES

Ag	8,4.10 <sup>-6</sup>	Mg.6	255,66
Ba.2	131,3	Mn(II)	146,9
Ca.6	390,7	NH <sub>4</sub>	75,5
Cd.4	128,22	Na.2	161,6
Co.6	284,51 <sub>250</sub>	Ni.6	322,5
Cu(II)	126,7	Pb(II)	*0,85
Fe(II).6	278,3	Pt(IV)	0,411
Hg(I)	3,9.10 <sup>-6</sup>	Sr.6	212,94
Hg(II)	0,553 <sub>250</sub>	Tl(I)	4,802.10 <sup>-2</sup>
K	65,2	Y	76,7
Li.2	434,3	Zn.2	870,5

### CARBONATES

Ag	3.10 <sup>-3</sup>	NH <sub>4</sub> .1	189,94
Ba	2,2.10 <sup>-3</sup>	NH <sub>4</sub> H	21,2
Ca	1,3.10 <sup>-3</sup>	Na.10	65,57
CuCO <sub>3</sub> .Cu(OH) <sub>2</sub>	2,61.10 <sub>300</sub> <sup>-4</sup>	NaH	9,6
Hg(I)	8,8.10 <sub>250</sub> <sup>-10</sup>	Ni	9,25.10 <sub>250</sub> <sup>-3</sup>
K.1,5	127,31	Pb(II)	1,1 — 1,7.10 <sup>-4</sup>
KH	33,3	Sr	1,09.10 <sub>240</sub> <sup>-3</sup>
Li	1,33	Tl(I)	5,23
Mg.3	3,676.10 <sub>250</sub> <sup>-2</sup>	Zn	2,06.10 <sup>-2</sup>
Mn(II)	6,5.10 <sub>250</sub> <sup>-3</sup>		

### CHLORATES

Ag	*14,48	Li	445,7
Ba.1	36,508	Mg	351,93
Ca.2	273,46	Na	100,56
Cd.2	516,64	Ni	131,1
Co(II)	181,9	Pb(II).1	170,15
Cs	6,275	Sr	174,9
Cu(II).4	326,5	Tl(I)	3,92
K	7,29	Zn.6	560

### CHLORITES<sup>c</sup>

Ba	20,5	Hg(II)	0,07
Ca	13,5	Sr	16,4

### CHLORURES

Ag	1,5.10 <sup>-4</sup>	Au	68
Al.6	0,572	Ba.2	44,465

Be.4	238,4	Mn.4	165,4
Ca	74,5	NH <sub>4</sub>	37,2
Cd.2,5	174,4	Na	36
Co(II).6	111,55	Ni.6	144,6 <sub>17,5</sub> °
Cu(I)	1,53	Pb(II)	1,0842 <sub>25</sub> °
Cu(II).2	108,1	Pt(IV).5	248,37 <sub>25</sub> °
Fe(II).4	138,23	Sb(III)	910,1
Fe(III).6	246,85	Sn(II)	269,8 <sub>15</sub> °
Hg(I)	3,8.10 <sup>-5</sup>	Sr.6	121,27
Hg(II)	6,572	Tl(I)	0,325
K	34	UO <sub>2</sub>	320
La.7	*218,3	Y.6	165,55
Li.1	168,66 <sub>25</sub> °	Zn	368
Mg.6	188,34		

### CHROMATES

Ag	2,6.10 <sup>-3</sup>	Mg.7	243,46
Ba	3,7.10 <sup>-4</sup>	NH <sub>4</sub>	33,61
Ca	16,6	Na.10	*344,5
Cu(II)	6,18.10 <sup>-2</sup>	Na.4	*85,45 <sub>25,6</sub> °
Hg(I)	2.10 <sup>-9</sup>	Pb(II)	1,7.10 <sup>-6</sup>
K	63,77	Sr	0,091 <sub>25</sub> °
La.8	0,02513 <sub>25</sub> °	Tl(I)	4,27.10 <sup>-3</sup>
Li	110,9		

### CITRATES

Ag	0,0277	K.1	172
Ba.7	0,0406	Li.4	99,48 <sub>15</sub> °
Bi(III)	0,011 <sub>25</sub> °	Na.5,5	70,3
Ca.4	0,08496	Ni(II).2	1,011 <sub>19</sub> °
Co(II)	0,267 <sub>10</sub> °	Pb(II).1	0,04201

### CYANURES

Ag	2,2.10 <sup>-5</sup>	I(I)	3,848 <sub>25</sub> °
Ba	80	K	71,5 <sub>25</sub> °
Cd	0,0247	Na	146,14
Co(II)	4,18.10 <sup>-3</sup>	Ni	5,92.10 <sup>-3</sup>
Hg(II)	11,27 <sub>25</sub> °	Tl(I)	16,8 <sub>28,5</sub> °

### DICHRONATES

Ag	8,3.10 <sup>-3</sup>	Na.2	250,53
K	10,91 <sub>15</sub> °	NH <sub>4</sub>	35,6
Mg	46,8 <sub>25</sub> °		

### FLUORURES

Ag.2	261,04	Mg	7,6.10 <sup>-3</sup>
Ba	0,1607	Mn.4	1,061
Be	549,3 <sub>25°</sub>	Na	3,96
Ca	1,7.10 <sup>-3</sup>	NH <sub>4</sub>	82,6
Cd	4,27	Ni.4	4,446
Co(II).4	2,427	Pb(II)	0,064
Cu(II).2	0,1018	Sb(III)	444,7
Fe(III)	0,091 <sub>25°</sub>	Sr	*0,0118
K.2	231,95	Th.4	0,0245 <sub>25°</sub>
Li	0,27	Tl	80 <sub>15°</sub>
		Zn.4	2,814

### FORMIATES

Ba	29,9	Mg.2	19,75
Ca	16,6	Na	96,7
Cd.2	17,39	NH <sub>4</sub>	143
Ce	0,39	Pb(II)	2,835
Cs.1	*830,45	Sr.2	15,66
Cu(II)	2,66 <sup>h</sup>	UO <sub>2</sub> .1	8,17 <sub>15°</sub>
K	329,18	Zn.2	6,484

### HEXACYANOFERRATES (4<sup>-</sup>)

Ba.6	0,1 <sub>15°</sub>	K.3	29,72
Ca.11	133,55 <sub>24,9°</sub>	Mn	6,43.10 <sup>-4</sup> g
Cd	2,75.10 <sup>-4</sup>	Na.10	30,28 <sub>16,7°</sub>
	à 3,05.10 <sup>-4</sup> v		
Ce(III).20	1,55.10 <sub>25°</sub> <sup>-2f</sup>	NH <sub>4</sub>	105,3 <sub>25,1°</sub>
Co(II)	3,96.10 <sup>-4</sup> g	Ni	3,29.10 <sup>-4</sup> g
Cu(II)	1,06.10 <sup>-4</sup> g	Pb(II)	1,729.10 <sup>-4</sup> e
Fe(III)	1,37.10 <sup>-4</sup> g	UO <sub>2</sub>	3,01.10 <sup>-3</sup> g
Ga	3,94.10 <sup>-3</sup> g	Zn	2,57.10 <sup>-4</sup> g

### HYDROXYDES

Ag <sub>2</sub> O	1,74.10 <sup>-3</sup>	Fe(II)	1,7.10 <sub>25°</sub> <sup>-4j</sup>
Al	1,43.10 <sup>-4</sup>	Fe(III)	3,63.10 <sup>-9</sup>
Au	3,9.10 <sup>-6</sup>	Ga	7,6.10 <sup>-9</sup>
Ba.8	7,396	GeO <sub>2</sub>	0,405
Be	9,5.10 <sup>-4</sup> i	Hg(I)	9,14.10 <sup>-6</sup>
Ca	0,156	Hg(II)	9,4.10 <sup>-2</sup>
Cd	1,2.10 <sup>-4</sup>	K	112
Ce	2,8.10 <sup>-5</sup>	La	1,75.10 <sup>-4</sup>
Co(II)	1,3.10 <sup>-4</sup>	Li.1	24,61
Cr	1,24.10 <sup>-7</sup>	Mg	6,4.10 <sup>-4</sup>
Cu(II)	5,56.10 <sup>-6</sup>	Mn	2,75.10 <sup>-4</sup>

Na	109	Th	$1,08 \cdot 10^{-8}$
Ni(II)	$1,27 \cdot 10^{-3}$	Tl(I)	34,34
Pb(II)	$1,16 \cdot 10^{-4}$	Tl(III)	$3,32 \cdot 10^{-8}$
Pb(IV)	$7,1 \cdot 10^{-12}$	Y(III)	$2,52 \cdot 10^{-5}$
Sn(II)	$2,06 \cdot 10^{-4}$	Zn	$3,57 \cdot 10^{-5}$
Sr.8	1,75	Zr(IV)	$1,27 \cdot 10^{-8}$
Se(III)	$1,7 \cdot 10^{-7}$		

### IODATES

Ag	$3,9 \cdot 10^{-3}$	Mn	$*0,223^v$
Ba.1	0,02285	NH <sub>4</sub>	$4,59_{30}^{30}$
Ca.6	*0,3066	Na.1	9,34
Ce(III)	$0,15 - 0,17_{25}^o$	Ni.2 $\alpha$	$0,7n$
Co(III)	1,04	Pb(II)	$1,9 \cdot 10^{-3}$
Cu(II).1	$0,356_{25}^o$	Sr(II)	$2,6 \cdot 10^{-2}_{15}^o$
Fe(III)	$0,0251^k$	Tl(I)	$5,78 \cdot 10^{-2}$
Hg(I)	$6 \cdot 10^{-8}$	Th(IV)	$2,03 \cdot 10^{-2}$
K	8,08	UO <sub>2</sub> (II).1	0,1163
La	$0,06842_{25}^o$	UO <sub>2</sub> (II).2	0,2160
La. $3/2$	0,19 $m$	Y(III).3	0,585
Li. $1/2$	87,84	Zn	$0,645_{25}^o$
Mg.4	11,31 $_{25}^o$		

### IODURES

Ag	$2,8 \cdot 10^{-7}$	K	144,5
As(III)	$6_{25}^o$	Li.3	385,9
Ba	577,15	Mg.8	112,65
Ca	208,6	Na.2	316,85
Cd	84,6	NH <sub>4</sub>	172,9
Co(II).6	*415,3 $p$	Ni.6	299,9
Cs	*77,93	Pb(II)	0,0613
Cu(II)	1,107	Sn(II)	0,98
Hg(I)	$2 \cdot 10^{-8}$	Sr.6	365,85
Hg(II)	0,054	Tl	$3,6 \cdot 10^{-2}$

### NITRATES

Ag	227,8	Cs	11,6
Al.9	159,37	Fe(II).6	209,55
Ba	9,015	Fe(III).9	$229,7_{25}^o$
Be.4	260,5	K	31,5
Ca.4	231,85	La.6 $\alpha$	*222,6 $q$
Cd.4	231,03	Li.3	185,25
Ce.6	370,45 $_{25}^o$	Mg.6	99,54
Co(II)	98,05	Mn	131,5
Cu(II).6	337,8	Na	87,5 — 88

NH <sub>4</sub>	191,04	Th.6	310,3
Ni.6	233,35	Tl	9,55
Pb(II)	55,8	UO <sub>2</sub> .6	197,6
Sr	68,6	Y	*133
		Zn.6	308,35

### NITRITES

Ag	0,34	Li.1	170
Ba.1	76,66	Mg.6	219,35 <sub>16,350</sub>
Ca.4	190,85	Na	121,8
Co(II)	0,40	NH <sub>4</sub>	180,1
K	74,3	Sr.1	75,28
		Tl	40,32

### OXALATES

Ag	3,78.10 <sup>-3</sup>	Li	6,45
Ba	1,1.10 <sup>-2</sup>	Mg.2	0,0396
Be(II).3	63,2 <sub>250</sub>	Mn.2	0,0363
Ca.1	7,5.10 <sup>-4</sup>	Mn.3	0,0813
Cd.3	6,35.10 <sup>-3</sup>	Na	3,41
Ce.10	5,32.10 <sup>-5</sup> <sup>m</sup>	NH <sub>4</sub> .1	5,106
Co(II).2	2,64.10 <sup>-3</sup>	Ni.2	5,1.10 <sup>-3</sup>
Cu(II). $\frac{1}{2}$	2,46.10 <sup>-3</sup>	Pb(II)	1,5.10 <sup>-4</sup>
Fe(II).2	4,41.10 <sup>-4</sup>	Sr.1	*5,277.10 <sup>-3</sup>
Hg(II)	1,07.10 <sup>-2</sup>	Th(IV).6	2,5.10 <sup>-3</sup>
K.1	29,53	Tl	1,577
La.9	8,41.10 <sup>-5</sup> à 3.10 <sub>250</sub> <sup>-4</sup>	UO <sub>2</sub> .3	0,578
La.10	8,97.10 <sup>-5</sup> <sup>m</sup>	Y.9	1,37.10 <sub>250</sub> <sup>-4</sup> <sup>m</sup>
		Zn.2	*8,13.10 <sup>-4</sup>

### PERCHLORATES

Ag.1	834	K	1,68
Al.9	255,5 <sub>30</sub> <sup>0</sup>	La	3,85.10 <sub>250</sub> <sup>-4</sup> <sup>8</sup>
Ba	198,3	Li.3	108,95
Ba.3	504,07	Mg.3	153,55
Be.4	298,5 <sub>250</sub>	Mg.6	219,1
Ca	188,6 <sub>250</sub>	Mn.6	292,4 <sup>r</sup>
Cd.6	1712	Na.1	155,25 <sub>250</sub>
Co(II).5	186,5 <sup>r</sup>	NH <sub>4</sub>	263
Co(II).6	259,1	Ni.5	211,9 <sup>r</sup>
Cu(II).6	317,3 <sub>30</sub> <sup>0</sup>	Ni.6	267,4
Cs	6,9.10 <sup>-3</sup>	Pb(II).3	789,5 <sub>250</sub> <sup>0</sup>
Fe(II).6	535,45	Sr	309,67 <sub>250</sub> <sup>0</sup>
Fe(III).10	1595,5	Tl	10 <sub>150</sub> <sup>0</sup>
Hg(I)	368	Y	3,5.10 <sub>250</sub> <sup>-5</sup> <sup>8</sup>

### PERIODATES

K	0,51 <sub>250</sub>	Na. 3	13,17
NH <sub>4</sub>	2,7 <sub>160</sub>		

### PERMANGANATES

Ag	0,9222	Li	141,17 <sub>160</sub>
Cs	0,227	NH <sub>4</sub>	8 <sub>150</sub>
K	6,32	Sr	2,56 <sub>00</sub>

### PEROXODISULFATES

Ba	39,1 <sub>00</sub>	K	4,49
NH <sub>4</sub>	118,3		

### PHOSPHATES

Ag	6,44.10 <sup>-4</sup>	Na.12	32,53
Ca	10 <sup>-2</sup> à 10 <sup>-3</sup>	NaH <sub>2</sub> .2	126
CaH.2	0,0222 <sub>150</sub>	Na <sub>2</sub> H.12	20,96
K <sub>3</sub>	98,4	NH <sub>4</sub>	7
KH <sub>2</sub>	22,6	NH <sub>4</sub> H <sub>2</sub>	37,4
K <sub>2</sub> H	160	(NH <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> H	69
Li	0,03	Pb(II)	1,35.10 <sup>-5</sup>
		Tl	0,523 <sub>150</sub>

### SULFATES

Ag	0,079	Mg. 7	92,83
Al.18	52,03	Mn. 4	124,5
Ba	2,55.10 <sup>-4</sup>	Mn. 5	137,82
Be.4	48,2	Na.10	54,83
Ca.2	0,25505	NH <sub>4</sub>	75
Cd. 8/3	110,85	Ni.7	91,51
Ce.8	12,105	Pb(II)	4,27.10 <sup>-3</sup>
Ce.9	13,008	Ra	2,1.10 <sup>-1</sup>
Co(II)	34,4	Sc.5	54,14 <sub>250</sub>
Cr(II).7	12,35 <sub>00</sub>	Sn	18,8
Cu(II).5	35,913	Sr	0,0132
Fe(II).7	55,66	Th	1,25 à 1,38
Hg(I)	0,058 <sub>250</sub>	Tl	4,87
K	11,11	UO <sub>2</sub> .3	*169,5
La.9	3,369	Y	*7,45
Li.1	43,94	Zn.7	136,04

### SULFITES

Ba	0,0197	Na	19,86
Ca.2	5,596.10 <sup>-3</sup>	NH <sub>4</sub> .1	76,72
Hg(I)	1,5.10 <sup>-12</sup> <sub>250</sub>	Tl	3,34 <sub>15,50</sub>
K	105,6 <sub>240</sub>	Zn.2	0,16
Mg.6	1,324 <sub>250</sub>		

### SULFURES

Ag	$9,42 \cdot 10^{-14}$	Fe(II)	$6,16 \cdot 10^{-4}$
As(III)	$5,2 \cdot 10^{-5}$	Ge(II)	0,24
As(V)	$1,36 \cdot 10^{-4}$	Ge(IV)	0,45
Ba	7,86	Hg(I)	$2,8 \cdot 10^{-24}_{250}$
Ba(SH) <sub>2</sub> .4	77,5	Hg(II)	$1,25 \cdot 10^{-6}$
Bi	$1,8 \cdot 10^{-5}$	Mn	$6,23 \cdot 10^{-4}$
Ca	0,0212	Na.9	53,46
Cd	$2,11 \cdot 10^{-9}_{250}$	Pb(II)	$8,66 \cdot 10^{-10}_{250}$
Cu(I)	$1,89 \cdot 10^{-13}_{180}$	Sb(III)	$1,75 \cdot 10^{-4}$
Cu(II)	$2,4 \cdot 10^{-14}_{250}$	Tl	$2,15 \cdot 10^{-2}$
Co(II)	$7 \cdot 10^{-7}$	Zn	$1,43 \cdot 10^{-8}$

### TARTRATES

Ag	0,2012	KH	0,5323
Ba	0,0279	La.3	$6,4 \cdot 10^{-3}_{250}$
Ca.4	0,0475	Mg.2 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	$1,5015_{250}$
Ce(III).4 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	$5,57 \cdot 10^{-3}_{250}$	NH <sub>4</sub>	63
Cu(II).3	0,042	Pb(II)	0,010
K. <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	$151,37_{16,60}$	Sr.3	0,2
		Zn.2	0,022

### THIOCYANATES

Ag	$1,4 \cdot 10^{-5}$	Li.2	232,25
Ba.3	$277,55_{250}$	Na	139,3
Cd	$5,85 \cdot 10^{-4}$	NH <sub>4</sub>	170,2
Co(II).4	8,286	Ni	54,9
Hg(I)	$3,88 \cdot 10^{-6}$ <sup>t</sup>	Pb(II)	$4,43 \cdot 10^{-2}$
Hg(II)	$0,063_{250}$	Tl	0,3163
K	217		

### THIOSULFATES

Ba	0,243	Na.5	153,9
Ca.6	$113,17_{250}$	Hg(I)	$2,2 \cdot 10^{-16}_{250}$
K	155,4		

### VANADATES

Ag <sub>6</sub> V <sub>4</sub> O <sub>13</sub>	$4,7 \cdot 10^{-8}_{140}$	NaVO <sub>3</sub>	$21,1_{250}$
Be(VO <sub>3</sub> ) <sub>2</sub> .4	$0,1_{250}$	NH <sub>4</sub> VO <sub>3</sub>	$6,1_{150}$
K <sub>3</sub> V <sub>6</sub> O <sub>14</sub> .5	$19,2_{17,50}$	Tl <sub>3</sub> VO <sub>3</sub>	$1_{150}$
Li <sub>3</sub> VO <sub>4</sub> .9	10,59		

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- a. LEGERLOTZ (H.), *Arch. der Pharm.*, **256**, 123 (1918); *C.Z.*, **89** II, 628 (1918).
- b. DUC-MAUGE (C.), *Compt. Rend.*, **245**, 64 (1957).
- c. LEVI (G.R.) et BISI (C.), *Gazz. chim. ital.*, **86**, 392 (1956).
- d. PETERSON (S.) et COOPER (O.W.), *Trans. Kentucky Acad. Sci.*, **13**, 146, (1951). *C.A.*, **45**, 10003 *f* (1951).
- e. BOVALINI (E.) et CASINI (A.), *Ann. Chim. (Rome)*, **43**, 790 (1953).
- f. TANANAEV (I.V.) et SEIFER (G.B.), *Zhur. Neorg. Khim.*, **1**, 53 (1956).
- g. TANANAEV (I.V.), *Zhur. Neorg. Khim.*, **1**, 66 (1956); *C.A.*, **50**, 9827 *h* (1956).
- h. PICKERING (S.U.), *J. Chem. Soc. (London)*, **101**, 184 (1912).
- i. KORENMAN (I.M.), FRUM (F.S.) et TSYGANKOVA (G.A.), *Zhur. Obshchei. Khim.*, **26**, 1558 (1956); *C.A.*, **51**, 4795 (1957).
- j. LEUSSING (D.L.) et KOLTHOFF (I.M.), *J. Am. Chem. Soc.*, **75**, 2476 (1953).
- k. ENDREDY (A. von), *Z. anorg. Chem.*, **217**, 59 (1934).
- l. MONK (C.B.), *J. Chem. Soc. (London)*, **1951**, 2723.
- m. RIMBACH (E.) et SCHUBERT (A.), *Z. phys. Chem.*, **67**, 183 (1909).
- n. MEUSSER (A.), *Ber.*, **34**, 2440 (1901).
- o. HAYES (A.M.) et MARTIN Jr (D.S.), *J. Am. Chem. Soc.*, **73**, 4853 (1951).
- p. ETARD [A.L.], *Ann. chim. phys.*, [7] **2**, 537 (1894).
- q. FRIEND (J.N.), *J. Chem. Soc. (London)*, **1935**, 826.
- r. SALVADORI (R.), *Gazz. chim. ital.*, **42**, 461 (1912).
- s. MOELLER (Th.) et FOGEL (N.), *J. Am. Chem. Soc.*, **73**, 4481 (1951).
- t. GROSSMANN (H.), *Z. anorg. Chem.*, **43**, 365 (1905).
- v. BASINSKI (A.) et LEDZINSKA (U.), *Roczniki Chem.*, **31**, 457 (1957).

## Analyseur magnétique pour deutérons de 12 Mev

PAR

A. GONZE \*

Centre de Physique nucléaire de l'Université de Louvain

### SOMMAIRE

Le présent article décrit, très succinctement, les caractéristiques principales d'un analyseur magnétique attaché au cyclotron de 12 Mev de l'Institut de Physique Nucléaire de l'Université de Louvain.

Il donne une déviation de 55° au faisceau de deutérons.

Les deutérons de 12 Mev, fournis par le cyclotron de l'Institut de Physique Nucléaire, furent utilisés de nombreuses années, pour la production d'isotopes radioactifs, par bombardement d'éléments placés à l'intérieur de la boîte à vide. L'extraction récente du faisceau de particules a nécessité la construction d'un ensemble de focalisation, constitué de quatre lentilles quadrupolaires magnétiques, et celle d'un électro-aimant analyseur. L'ensemble est représenté à la fig. 1 en même temps que le cyclotron.

Nous avons assuré la réalisation de cet analyseur et nous poursuivons actuellement, en collaboration avec P. Macq, la mise au point de la focalisation et de l'analyse.

Nous donnons ci-dessous les caractéristiques principales de l'analyseur.

### PRINCIPES FONDAMENTAUX

La relation bien connue régissant l'analyse d'un faisceau de particules de masse  $m$ , de charge  $e$  et de vitesse  $v$  s'écrit :

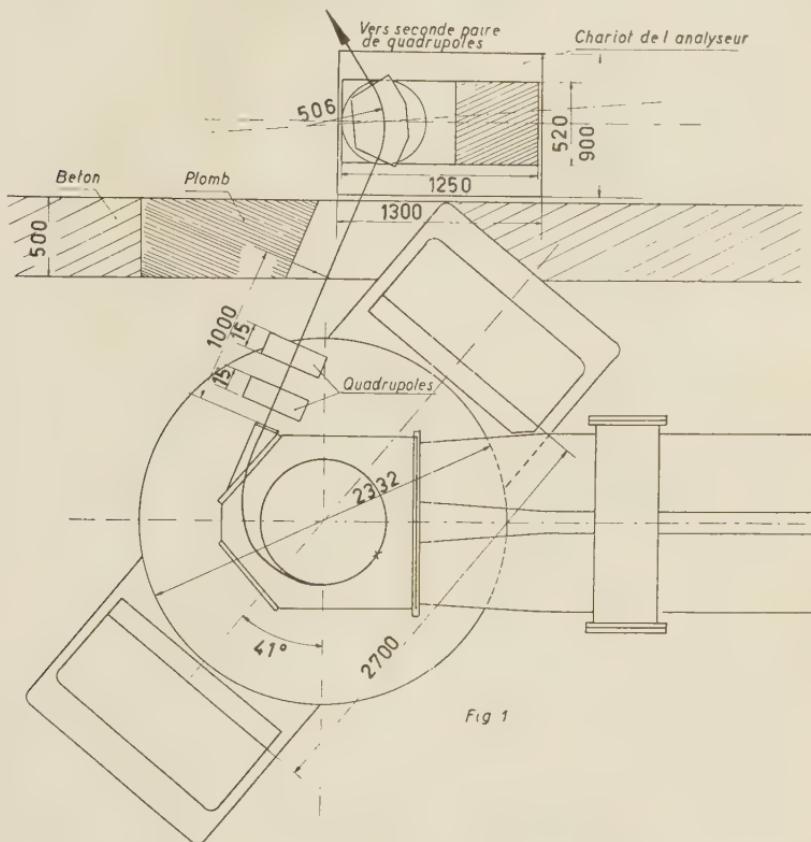
$$Br = mv/e = \sqrt{2mE_k/e} \text{ gauss. cm.}$$

Sous l'action du champ magnétique  $B$ , les deutérons d'énergie

\* Chercheur agréé de l'I.I.S.N.

$E_k$  subissent une force qui donne à la trajectoire une forme circulaire de rayon  $r$ .

A des quantités de mouvement différentes ou à des rapports « masse sur charge » différents vont correspondre, en vertu de cette relation, et pour un champ maintenu constant, des rayons



de courbure différents. Dès lors, seules les particules de même nature et de même énergie seront, à une légère erreur d'aberration près, focalisées en un même point. La dispersion correspondant à un certain écart d'énergie permet de sélectionner les tranches utiles du spectre par utilisation d'un diaphragme de largeur réglable.

L'appareillage étant difficilement mobile, la sélection des particules désirées s'obtient en ajustant le champ magnétique qui les focalise sur la fente de sortie.

## L'ANALYSEUR.

### Généralités

Des considérations d'encombrement et de topographie nous ont fait choisir un angle de déviation de  $55^\circ$ .

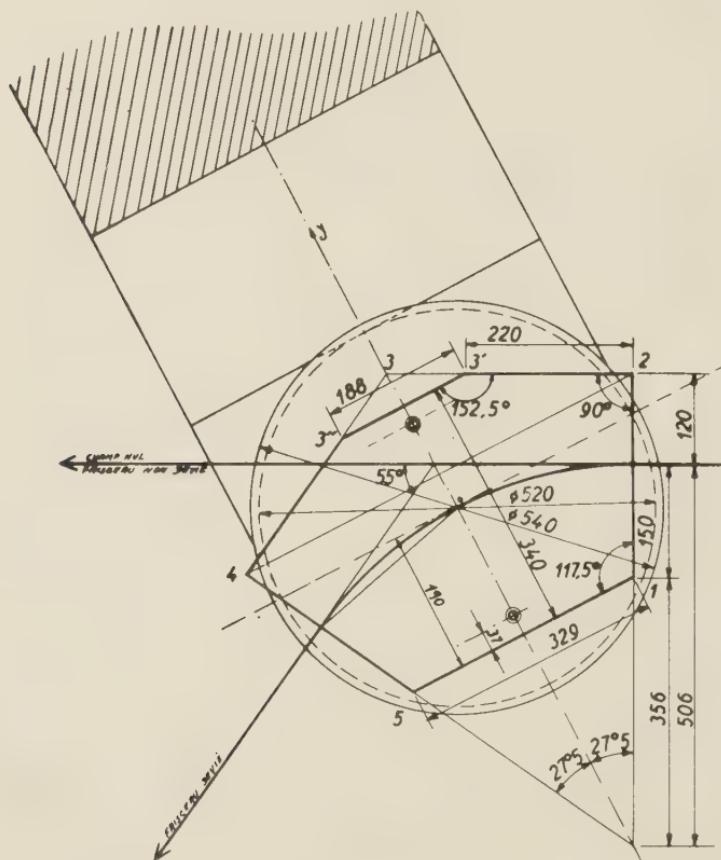


Fig. 2

Le moment électronique  $Br$  des deutérons de 12 Mev fournis par le cyclotron est de 708660 gauss-cm. Nous l'avons réalisé en utilisant une induction de 14.000 gauss donnant aux particules une trajectoire courbe de 50,6 cm de rayon. La distance d'entrefer de l'aimant, conditionnée par la focalisation verticale du faisceau, a été prise égale à 4 cm pour le régime le plus courant. Un dis-

positif très simple permet de ramener cette hauteur à 3 ou 2 cm suivant les besoins de l'expérience.

Les plaques polaires, en fer de Suède, donnent aux particules la trajectoire désirée. Situées de part et d'autre de l'entrefer, ces plaques, représentées à la fig. 2, sont de section polygonale avec faces limites d'entrée et de sortie normales au faisceau.

#### *Données mécaniques principales*

La place disponible étant limitée, nous avons utilisé la forme en C représentée à la fig. 3 qui rend l'aimant moins encombrant

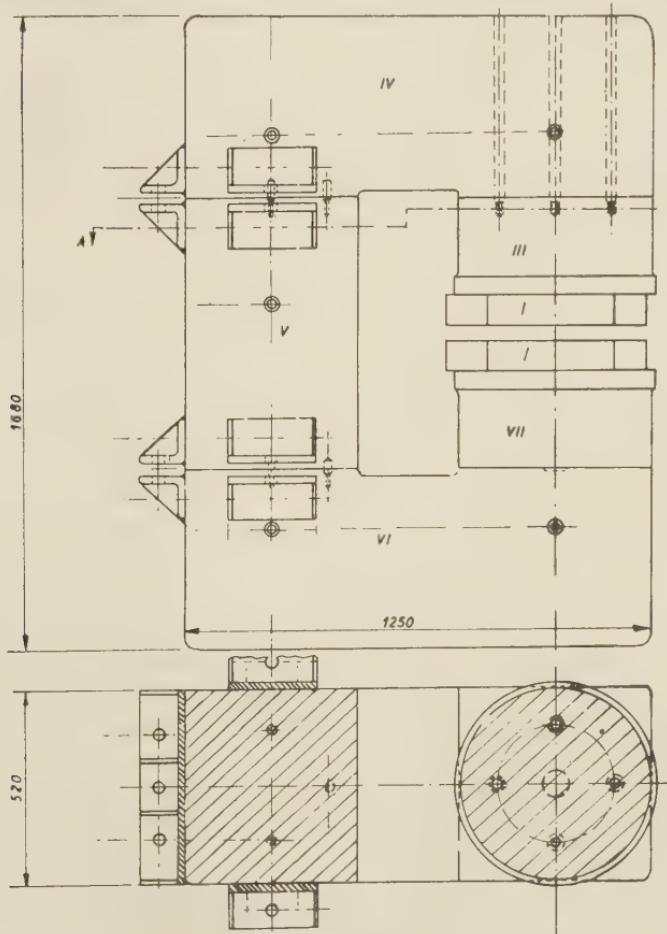


Fig. 3

et plus accessible. L'analyseur a une hauteur de 1,68 m et une section horizontale de 1,25 m  $\times$  0,52 m. Les branches latérale, supérieure et inférieure du corps de culasse sont constituées de trois blocs en acier doux, d'un poids total de 6,2 tonnes. La seconde branche comprend l'entrefer de 4 cm, les deux plaques polaires de 8 cm chacune, et deux cylindres polaires de 54 cm de diamètre et 26 cm de hauteur. Ces derniers encadrent les plaques polaires et supportent les bobines d'excitation qui, montées sur supports en aluminium, sont glissées autour d'eux.

Le poids global de l'aimant s'élève à environ 8 tonnes. Cette charge est placée sur chariot mobile de hauteur réglable, permettant le déplacement en tous sens et le positionnement exact de l'aimant par rapport au faisceau.

Les blocs principaux sont fixés les uns aux autres par des cornières latérales soudées au corps et boulonnées deux à deux. Le cylindre supérieur est suspendu à la tête de culasse par un jeu de boulons, tandis que le second cylindre est simplement posé sur la branche inférieure de l'aimant.

L'effort d'attraction en charge, trop élevé pour les boulons de serrage, est repris par le contour extérieur de la boîte à vide. Celle-ci est constituée simplement par une bande d'aluminium comprimé, formant les parois verticales; le fond et le couvercle ne sont autres que les plaques polaires de l'aimant. Les orifices d'entrée et de sortie du faisceau dans l'entrefer sont fraisés dans les parois d'aluminium.

### *Caractéristiques électriques*

La déflexion des deutérons d'un angle de 55° demande 14.000 gauss dans l'entrefer. La force magnétomotrice nécessaire pour réaliser cet état est de 51.200 At, soit 50 A circulant dans 1024 spires. La puissance absorbée par l'aimant s'élève à 5 kw pour ce régime; elle est fournie par une génératrice continue fonctionnant en excitation indépendante. L'enroulement de l'aimant est réparti entre deux bobines supportées par les cylindres polaires. Les deux bobines identiques comprennent chacune huit galettes de 64 spires, superposées à l'intérieur d'un tore en Aluminium, avec interposition de plaques de cuivre et circulation périphérique d'un courant d'eau. Le conducteur est une bande de 20 mm  $\times$  1 mm, d'environ 2.000 m.

L'excitation de la génératrice est réalisée par une amplidyne soumise elle-même à l'action d'un régulateur électronique. On comprend aisément qu'il soit nécessaire de stabiliser le champ magnétique pour éviter les variations d'analyse en cours d'expériences. La stabilisation contrecarre toute modification du courant principal par une correction adéquate de l'excitation d'amplidyne.

## PREMIERS RÉSULTATS

L'analyse imposait l'obtention d'un champ très homogène de 14.000 gauss, introduisant le minimum de perturbations externes.

Les mesures précises du champ déjà réalisées ont fourni de très bons résultats quant à la caractéristique du champ de l'analyseur et à son homogénéité. Le flux de fuite de l'aimant varie de 30 à 60 % du flux utile, suivant la valeur d'entrefer utilisée; son influence sur les particules est cependant très faible par suite de la forme compacte donnée à cet entrefer. La constance du champ atteint 1/1000 sur une plage étendue des plaques polaires.

Quant à l'analyse elle-même, sa mise au point étant en cours, nous ne pouvons encore mesurer le pouvoir de résolution qui reste à vérifier.

Nous ne pouvons terminer cet article sans adresser nos plus vifs remerciements à Monsieur le Professeur M. de Hemptinne, qui nous a ouvert son laboratoire, ainsi qu'à Monsieur le Professeur P. Macq, qui a bien voulu nous conseiller. Nous tenons à signaler l'aide efficace reçue du personnel technique de l'Institut de Physique Nucléaire de Louvain, et à exprimer toute notre reconnaissance à l'Institut Interuniversitaire des Sciences Nucléaires, qui a permis de réaliser ce travail.

## Polarimètre conique pour rayons gamma; mesures de corrélation « bêta-gamma polarisés circulairement » de $\text{Au}^{198}$

PAR

J. P. DEUTSCH (\*), P. LIPNIK (\*)  
Centre de Physique Nucléaire, Université de Louvain, Belgique

### ABSTRACT

A new-type non-cylindrical device for measurement of gamma-ray circular polarisation is presented. A figure of merit is computed to compare different polarimetric devices. The developed polarimeter seems to present high merit excepted in the very low energy region ( $E < 300$  Kev) where Steffen-type polarimeters (2) are to be prefered.

Preliminary results of beta — gamma circular polarisation correlation measurements on  $\text{Au}^{198}$  are presented. The value  $A = 0.45 \pm 0.11$  obtained agrees with other results in the field.

### INTRODUCTION

A partir de la mise en évidence de la non-conservation de la parité dans les interactions faibles, les développements théoriques et expérimentaux ont suffisamment simplifié la description de cette interaction pour rendre possible l'évaluation expérimentale d'un certain nombre de combinaisons particulièrement simples des éléments de matrice qui connectent les états nucléaires (2,3). Ces expériences méritent notre intérêt à plusieurs titres : elles fournissent des renseignements sur le processus d'interaction faible, les spins et parités des états interagissants, et elles nous informent également sur les fonctions d'onde des états nucléaires.

Ces mesures nécessitent toutes l'observation d'un pseudo-scalaire. Pour un système nucléaire qui se désexcite successivement par émission bêta et gamma, un des pseudo-scalaires les plus

(\*) Chercheur agréé de l'I.I.S.N.

simples à observer est  $P_{\text{b}\beta\text{ta}} \cdot S_{\text{gamma}}$ , c.à.d. l'observation de la polarisation circulaire du rayon gamma mesurée par rapport à la direction d'émission du rayon bêta simultanément émis.

La polarisation circulaire des rayons gamma se mesure habituellement en déterminant leur section efficace de diffusion Compton sur des électrons de spin orienté (1,4,10). Les polarimètres communément employés (5,6,7) ont toutefois le désavantage d'être peu efficents à l'analyse de la polarisation circulaire des rayons gamma d'énergie entre 100 et 800 Kev. D'où l'erreur relativement grande dans les mesures de corrélation « bêta-gamma polarisé circulairement » des radioisotopes comme Au<sup>198</sup> (E = 411 Kev) et As<sup>74</sup> (E = 635 Kev) (?). Vu le grand nombre des isotopes ayant un rayon gamma d'énergie entre 100 et 800 Kev, il nous a paru intéressant de développer un polarimètre spécialement étudié pour l'analyse des rayons gamma dans cet intervalle d'énergie et de l'utiliser en premier lieu pour augmenter la précision des résultats de Au<sup>198</sup>.

Au cours de ce travail nous avons pris connaissance d'un polarimètre d'un nouveau type, développé par Steffen (2), suivant une idée de Beard et Rose (9), ainsi que des mesures sur Au<sup>198</sup> dans lesquelles il l'a utilisé.

Nous décrivons le polarimètre construit et discutons les mérites respectifs des divers types de polarimètres. Nous présentons ensuite les mesures d'étalonnage effectuées avec la Bremsstrahlung du Tm<sup>170</sup>, ainsi que les résultats préliminaires des mesures de corrélation « bêta-gamma polarisé circulairement » de Au<sup>198</sup>.

## DESCRIPTION DU POLARIMÈTRE

Pour mesurer la polarisation circulaire des rayons gamma, on utilise habituellement la propriété que leur section efficace Compton sur des électrons orientés dépend de leur polarisation (1,4,10). Les électrons orientés sont obtenus par aimantation du fer; les polarimètres diffèrent entre eux par la géométrie de la source de rayonnement, du diffuseur et du détecteur. L'efficience globale du polarimètre dépend fortement du choix de cette géométrie.

Le schéma de notre polarimètre, ainsi que sa disposition sont repris à la Fig. 1. Le polarimètre est constitué d'un électro-aimant à symétrie axiale en acier doux. A 1260 ampère-tours nous y obtenons une induction de 18300 gauss, c.à.d. 87 % de l'induction à satu-

ration. A cette induction 7.31 % des électrons du fer se trouve orienté (v.p.e. (1)). Les rayons gamma sont admis dans une direction située entre  $10^\circ$  et  $20^\circ$  par rapport à l'axe du polarimètre. Il subissent la diffusion Compton sur des électrons en partie orientés — en moyenne — respectivement à  $45^\circ$  et à  $135^\circ$  par rapport à leur direction d'incidence. Les rayons gamma diffusés dans un angle moyen de  $73^\circ$  sont détectés par un cristal de NaI:Tl. Un discriminateur de hauteur d'impulsions est introduit dans le canal gamma pour éliminer les rayons gamma dégradés dans l'écran de plomb (v. Fig. 1.) et une partie des rayons gamma ayant subi une diffusion multiple.

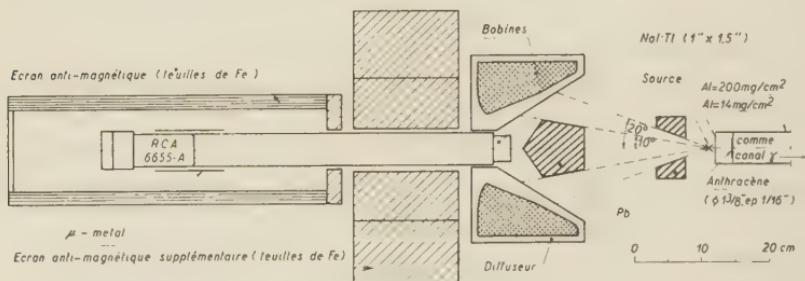


Fig. 1 — Dispositif expérimental.

Moyennant quelques simplifications, nous avons calculé par intégration graphique — pour des rayons gamma incidents de 411 Kev — le spectre d'énergie des rayons gamma ayant subi une diffusion simple. La comparaison du spectre ainsi calculé et du spectre mesuré nous permet d'estimer à 4 % la limite supérieure de la contribution des rayons gamma détectés après une diffusion double ou multiple. A cette énergie la contribution des rayons gamma diffusés dans le cuivre de l'enroulement d'aimantation est négligeable (0.4 % au maximum). Les détails de ces calculs seront décrits ultérieurement par l'un d'entre nous (J.P.D.).

#### COMPARAISON DES DIVERS POLARIMÈTRES

Un polarimètre pour rayons gamma utilise soit la transmission, soit la diffusion des quanta incidents dans un angle donné.

Les premiers polarimètres construits (5,6) sont du premier type. On a développé ensuite des polarimètres cylindriques à angle

de diffusion relativement petit (env. 50°) (7,8). Un de ces polarimètres (7) est repris à la Fig. 2. Les polarimètres développés par nous et par Steffen (2) (schématisé à la Fig. 3.) restent à symétrie

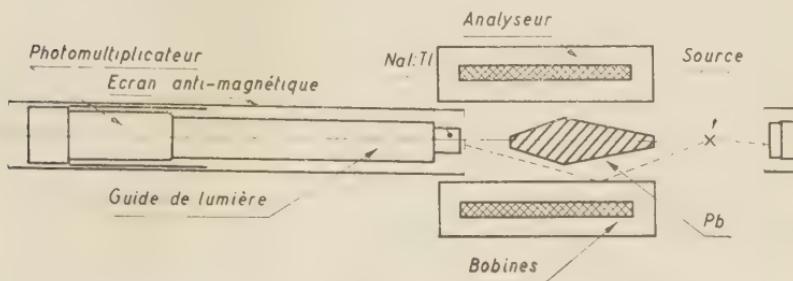


Fig. 2 — Polarimètre cylindrique (7).

axiale, mais ne sont plus cylindriques. Ils utilisent des angles de diffusion plus grands (env. 73° et 127°). La méthode de rétro-diffusion, bien que très efficace, semble être difficile à utiliser (11).

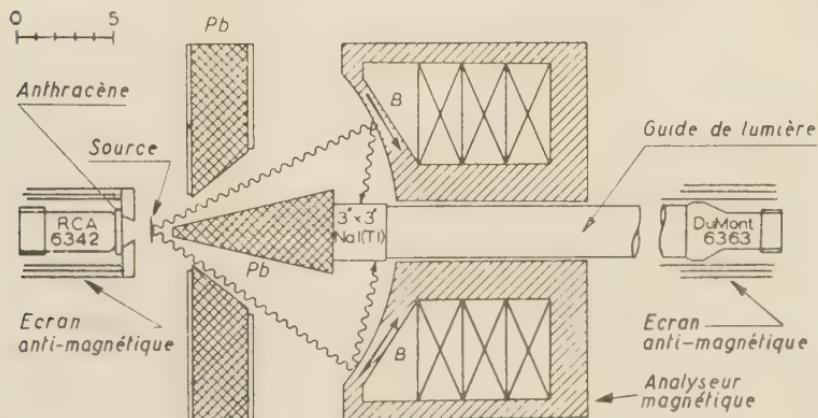


Fig. 3 — Polarimètre de Steffen (2).

La sélectivité en énergie de la méthode de transmission est très bonne. Malheureusement sa luminosité est très faible. De plus elle est inutilisable pour l'analyse des rayons gamma d'énergie d'environ 600 Kev.

La méthode de diffusion par polarimètres cylindriques laisse également à désirer pour des rayons gamma de basse énergie.

C'est en calculant les angles d'aimantation et de diffusion

optima que nous avons été amenés à sacrifier la facilité technique de construction des polarimètres cylindriques, et à réaliser le polarimètre schématisé à la Fig. 1.

Au cours de nos mesures nous avons été informés d'un travail semblable entrepris par Steffen (2). Utilisant une méthode proposée par Beard et Rose (9), il a développé le polarimètre schématisé à la Fig. 3. Pour des raisons techniques, la méthode proposée par Beard et Rose n'a pas pu toutefois être réalisée dans les meilleures conditions.

Nous avons entrepris aux Fig. 4a, 4b et 4c une comparaison approximative des divers polarimètres. Dans chaque cas nous n'avons tenu compte que de la diffusion d'un seul rayon gamma et nos résultats ne sont donc qu'approximatifs. L'incertitude de ces résultats simplifiés et des courbes de la Fig. 4. peut être estimée à 10 % vu les calculs plus réalistes que nous avons effectués en tenant compte de la géométrie de notre polarimètre pour des rayons gamma d'énergie de 411 Kev. — Les calculs relatifs à la méthode de transmission ont été effectués à partir du dispositif de la référence (6).

A la Fig. 4 nous avons représenté l'efficience ( $P = \phi_c/\phi_0 \cos \theta_m$ ) des polarimètres en fonction de l'énergie des rayons gamma à analyser.  $\phi_c$  et  $\phi_0$  sont les parties de la section efficace Compton qui dépendent du spin et qui n'en dépendent pas.  $\theta_m$  est l'angle moyen d'incidence des rayons gamma par rapport à l'axe du diffuseur. (Ce terme s'introduit dans le cas des mesures de corrélation « bêta-gamma polarisé circulairement »). L'efficience  $P$  ainsi définie est la moitié du paramètre  $E$  habituel (v.p.e. (4)) qu'on obtiendrait avec des rayons gamma et des électrons diffusieurs complètement polarisés. — Notre polarimètre semble réaliser un optimum, sauf pour des énergies supérieures à 800 Kev, où l'efficience des polarimètres cylindriques semble meilleure.

L'efficience n'est toutefois pas l'unique facteur à considérer. Même un effet petit est facilement mesurable si le nombre des rayons gamma détectés est grand. Nous devons donc également comparer la « luminosité » des divers polarimètres. Nous l'avons fait à la Fig. 4b. La « luminosité »  $\varepsilon$  est obtenue comme le produit des trois facteurs suivants : 1. l'angle solide sous lequel la source « voit » le diffuseur, 2. l'angle solide « diffuseur-détecteur » et 3. la section efficace différentielle de l'effet Compton dans la direction sélective du polarimètre.

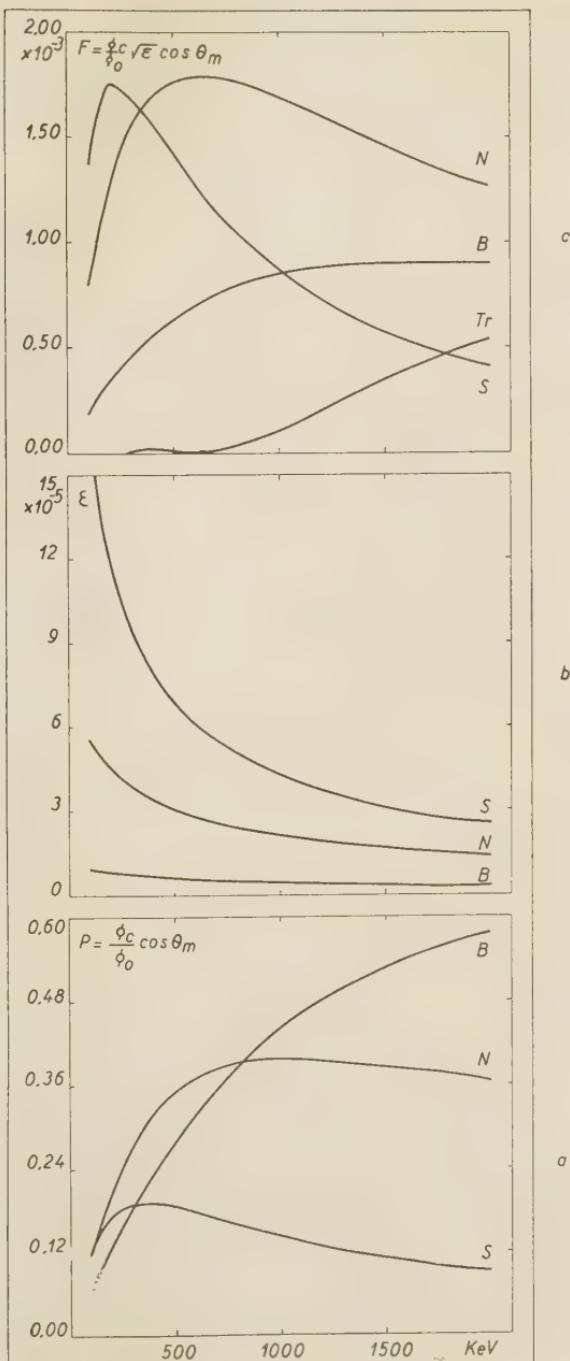


Fig. 4 — Comparaison des polarimètres de divers types. Tr : transmission; B : polarimètre cylindrique; S : polarimètre de Steffen; N : notre polarimètre; 4a : courbes d'efficience; 4b : courbes de luminosité; 4c : courbes du facteur de mérite.

L'erreur relative d'une mesure de la polarisation circulaire est inversement proportionnelle à la grandeur de l'effet mesuré et à la racine carrée du nombre des signaux totalisés. Ainsi le produit de l'efficience d'un polarimètre par la racine carrée de sa luminosité nous semble être un « facteur de mérite » approprié. Nous l'avons représenté à la Fig. 4c.

La Fig. 4c nous montre la nette supériorité des méthodes de diffusion sur la méthode de transmission (au moins pour les mesures qui nécessitent la détermination de coïncidences). Le polarimètre de Steffen semble être très bon à très basse énergie (entre 100 et 300 Kev). Au-delà de 350 Kev notre polarimètre semble être supérieur aux autres. Remarquons toutefois qu'à haute énergie l'influence des rayons gamma diffusés sur l'enroulement de l'électro-aimant peut devenir appréciable.

#### ETALONNAGE DU POLARIMÈTRE

L'étalonnage absolu des polarimètres nécessiterait la connaissance de la polarisation circulaire de rayons gamma de divers énergies. L'unique polarisation circulaire connue est celle des rayons gamma « d'annihilation en deux quanta » du positron. Reprenant une idée ancienne<sup>(12)</sup>, nous nous proposons d'appliquer cette méthode à l'étalonnage de notre polarimètre pour des rayons gamma de 511 Kev. L'effet étant toutefois très petit, l'étalonnage nécessite des mesures très longues. Nous les communiquerons ultérieurement.

En attendant il nous a semblé souhaitable de déterminer l'efficience de notre polarimètre par d'autres méthodes plus relatives peut-être, mais plus rapides aussi.

1. Une première méthode consistait en la mesure de la polarisation circulaire de la Bremsstrahlung émise par une source de  $Tm^{170}$ . Nous savons<sup>(13,14,15)</sup> que la Bremsstrahlung émise par un rayon bêta polarisé présente une polarisation circulaire. En principe à partir de l'effet mesuré et la polarisation circulaire connue de la Bremsstrahlung on pourrait déterminer l'efficience, ou encore le rapport  $\phi_c/\phi_0$  effectif du polarimètre. Cependant la polarisation circulaire des quanta de Bremsstrahlung de 411 Kev est mal connue. Pour la déterminer nous avons alors suivi deux voies : a. nous avons extrapolé les résultats de Galster et Schopper<sup>(15)</sup> vers 411 Kev et b. nous avons calculé la polarisation circulaire « théorique »

des quanta de 411 Kev à partir de l'expression (8) de la référence (13) donnant la polarisation circulaire des quanta d'énergie maximum et en effectuant une construction analogue à celle qui a permis pour  $\text{Y}^{90}$  d'obtenir la ligne continue de la figure 2 de la référence (15). Nous obtenons ainsi une valeur « théorique » de la polarisation circulaire des quanta d'énergie inférieure à l'énergie maximum. Il est évident que ce procédé simplifié ne tient pas compte de la possibilité d'une émission « latérale » de la Bremsstrahlung par rapport à la direction du rayon bêta, possibilité qui n'est plus négligeable pour des quanta de 411 Kev.

Ces deux valeurs « expérimentale » et « calculée » de la polarisation circulaire ont été comparées à l'effet effectivement mesuré sur le spectre de Bremsstrahlung du  $\text{Tm}^{170}$ . (Dans les mesures nous avons tenu compte de l'influence parasite du champ magnétique sur les photomultiplicateurs et de la transmission des rayons gamma à travers l'écran de plomb). La comparaison nous fournit pour le rapport  $\phi_c/\phi_0$  les valeurs de  $0.446 \pm 0.223$  (exp.) et  $0.299 \pm 0.140$  (calculé).

2. Une deuxième méthode consistait à comparer les résultats des mesures de corrélation « bêta-gamma polarisé circulairement » effectuées avec notre polarimètre (v. plus bas) aux mesures analogues effectuées par d'autres chercheurs (2,7,8). Ces derniers ont été réunis compte tenu de leur erreur relative. La comparaison nous donne pour le rapport  $\phi_c/\phi_0$  la valeur de  $0.316 \pm 0.080$ .

3. Enfin la troisième méthode pour déterminer l'efficience du polarimètre a été le calcul contrôlé par la mesure du spectre d'énergie des rayons gamma diffusés. L'intégration graphique esquissée plus haut nous a permis de calculer également  $\phi_c/\phi_0$  moyen en retenant uniquement la contribution des diffusions simples : 0.304. Une comparaison du spectre calculé avec le spectre expérimental fixe la contribution des rayons gamma doublement diffusés à  $2.5 \pm 1.5\%$ , reportant ainsi la valeur du rapport  $\phi_c/\phi_0$  à  $0.300 \pm 0.003$ . L'efficience variant peu dans cette région en fonction de l'angle de diffusion des rayons gamma, une erreur éventuelle dans la détermination de l'angle de diffusion n'a qu'une influence minime sur la détermination de l'efficience. Cette erreur étant estimée à quelques pourcent, elle n'introduit pas d'imprécision supplémentaire dans le chiffre indiqué plus haut.

Nous avons réuni les résultats des diverses déterminations de  $\phi_c/\phi_0$  à la Fig. 5. Nous voyons qu'ils sont cohérents. Pour nos

mesures de corrélation, nous allons retenir la valeur  $\phi_c/\phi_0 = 0.300 \pm 0.003$ .

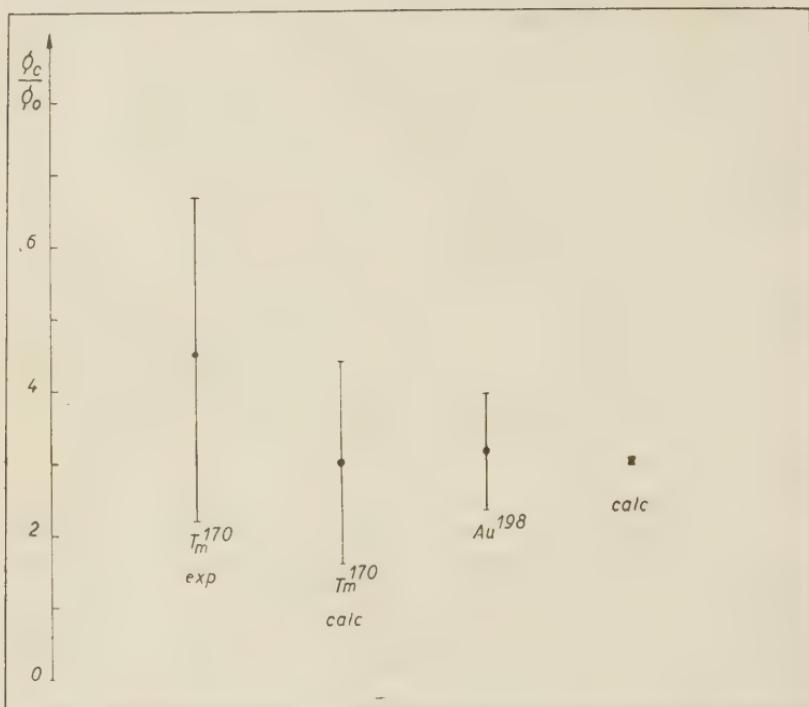


Fig. 5 — Valeurs de  $\phi_c/\phi_0$  effectif de notre polarimètre obtenues par diverses méthodes.

$Tm^{170}$  exp. : mesure de la polarisation circulaire de Bremsstrahlung du  $Tm^{170}$  (comparaison avec les mesures de la référence (15)).  $Tm^{170}$  calc. : mesure de la polarisation circulaire de Bremsstrahlung du  $Tm^{170}$  (comparaison avec la polarisation circulaire calculée);  $Au^{198}$  : mesure de la corrélation « bêta—gamma polarisé circulairement » (comparaison avec les résultats d'autres expérimentateurs); calc. : valeur calculée.

#### *Mesures de corrélation « bêta-gamma polarisé circulairement » de $Au^{198}$*

99 % de  $Au^{198}$  se désexcite par une cascade bêta-gamma :  $2^- - 2^+ - 0^-$  (16). Cette transition bêta, « une fois interdite », est une des mieux étudiées (v.p.e.(2)). La transition gamma a une énergie de 411 Kev, particulièrement avantageuse pour notre polarimètre. La corrélation « bêta-gamma polarisé circulairement », tout en

étant déjà mesurée par quelques expérimentateurs (2,7,8), n'est connue qu'avec une erreur relativement grande. (Le paramètre de mélange  $x$  — défini p.e. dans la référence (7) — n'est déterminé

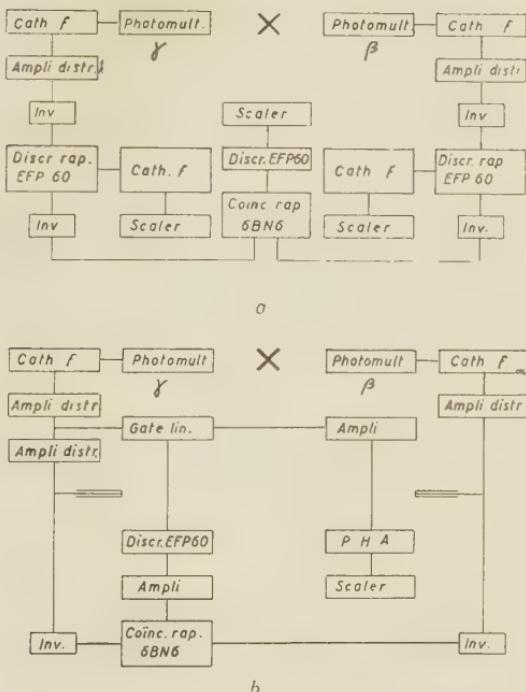


Fig. 6 — Schéma de principe des circuits électroniques de la première et de la deuxième expérience de mesure de corrélation « bêta — gamma polarisé circulairement ».

qu'avec les limites suivantes :  $0.6 < x < 2.1$ ). Il nous a donc paru intéressant d'utiliser notre polarimètre en premier lieu à une détermination plus précise de la corrélation « bêta-gamma polarisé circulairement » du Au <sup>198</sup>.

Le dispositif expérimental est schématisé à la Fig. 1, le schéma de principe des circuits électroniques est repris aux Fig. 6a et 6b.

Fig. 6a correspond à une première expérience. Les discriminateurs rapides permettent de dénombrer les signaux entrant « efficacement » dans le circuit de coïncidence et donc de tenir compte exactement de l'influence parasite du champ magnétique sur les photomultiplicateurs. La sélection d'énergie qu'on désire opérer dans le canal gamma ne permet toutefois pas d'y saturer

les signaux, et limite donc le temps de résolution utilisé à  $10^{-7}$  sec environ.

Dans une deuxième expérience, schématisée à la Fig. 6b, l'inconvénient de la première est éliminé : le temps de résolution est porté à  $2 \cdot 10^{-8}$  sec. L'influence du champ magnétique perturbateur est déterminée par des mesures intercalées régulièrement entre les mesures principales.

Une troisième expérience utilise un circuit «fast-slow» classique.

Les résultats — cohérents — de ces trois phases de l'expérience ont été composés statistiquement.

La polarisation circulaire d'un rayon gamma émis antiparallèlement à un rayon bêta de vitesse  $v$  étant définie comme  $(v/c)A$ , cette quantité peut être calculée directement à partir de l'effet expérimental  $E$  (défini p.e. dans la référence <sup>(4)</sup> par la relation :

$$E = 2fA \cos \theta_m (\phi_c/\phi_0) (v/c), \text{ où}$$

$f$  est le pourcentage des électrons polarisés de l'analyseur,  $\cos \theta_m$  la moyenne du cosinus de l'angle formé par les directions d'émission du rayon bêta et du rayon gamma,  $(v/c)$  la vitesse moyenne (en unités  $c$ ) des rayons bêta acceptés. Les autres symboles ont été définis plus haut.

Pour la détermination de  $E$ , nous avons tenu compte de l'influence perturbatrice du champ magnétique sur les photomultiplicateurs, des coïncidences fortuites et des rayons gamma transmis à travers l'écran de plomb. Le résultat préliminaire ainsi obtenu (en réunissant les trois phases de l'expérience) est  $E = 1.56 \pm 0.39 \%$ .

$f$  a été déterminé par des mesures d'induction magnétique, en tenant compte également de la contribution de 3 % que le mouvement orbital des électrons y apporte (v.p.e. <sup>(1)</sup>). Nous obtenons ainsi la valeur  $f = 7.31 \pm 0.12 \%$ .

$\cos \theta_m$  a été calculé d'après l'angle solide expérimentalement déterminé du détecteur bêta et l'angle moyen calculé entre la direction d'incidence des rayons gamma et de l'axe du diffuseur. L'expression (28) de la référence <sup>(4)</sup> nous fournit alors la valeur :  $\cos \theta_m = 0.965 \pm 0.001$ .

Les absorbeurs à traverser par les rayons bêta et la discrimination de hauteur d'impulsions opérée dans ce canal éliminent les rayons bêta de basse énergie. L'énergie effective de coupure

a été déterminée expérimentalement par analyse des hauteurs d'impulsions. Nous en déduisons la valeur :  $(v/c) = 0.814 \pm 0.033$ .

Enfin, l'efficience effective du polarimètre a été déterminée par les méthodes décrites au chapitre « étalonnage du polarimètre ». Nous avons obtenu la valeur  $\phi_e/\phi_0 = 0.300 \pm 0.003$ .

Les résultats ainsi réunis nous fournissent pour  $A$  la valeur préliminaire de  $A = 0.45 \pm 0.11$ , en bon accord avec les résultats des autres expérimentateurs (2,7,8).

Les détails de l'expérience de corrélation seront décrits ultérieurement par l'un d'entre nous (J.P.D.).

Monsieur le Professeur M. de Hemptinne a bien voulu nous montrer l'intérêt qu'il portait à ce travail; nous avons largement profité de l'aide et des conseils de Monsieur le Professeur P.C. Macq; Monsieur le Professeur R.M. Steffen nous a communiqué ses résultats avant leur publication. Nous tenons à leur exprimer nos plus vifs remerciements. Nous remercions également M.A. Derem, de l'aide qu'il nous a fournie au cours de nos calculs, ainsi que les ateliers mécaniques et électroniques du C.P.N.L.

#### RÉFÉRENCES

- (1) L. GRODZINS, *Progress in Nucl. Phys.* Vol. 7., p. 163. Pergamon Press, London (1959).
- (2) R. M. STEFFEN (à publier).
- (3) T. KOTANI, M. ROSS, *Phys. Rev. Letters*, 1, 140 (1958).
- (4) H. SCHOPPER, *Nucl. Instr.* 3, 158 (1958).
- (5) A. LUNDBY, A.P. PATRO, J.P. STROOT, *Nuovo Cimento*, 6, 745 (1957).
- (6) M. GOLDHABER, L. GRODZINS, A.W. SUNYAR, *Phys. Rev.* 106, 826 (1957).
- (7) F. BOEHM, A.H. WAPSTRA, *Phys. Rev.* 107, 1202 (1957).  
*Phys. Rev.* 107, 1462 (1957).  
*Phys. Rev.* 109, 456 (1958).
- (8) J. BERTHIER, P. DEBRUNNER, W. KÜNDIG, B. ZWAHLEM, *Helv. Phys. Acta* 30, 483 (1958).
- (9) D.B. BEARD, M.E. ROSE, *Phys. Rev.* 108, 164 (1957).
- (10) H.A. TOLHOEK, *Rev. Mod. Phys.* 28, 277 (1956).
- (11) J. DEUTSCH, *Annales Soc. Sci. de Bruxelles*, 73, 270 (1959).
- (12) E.P. CLAY, F.L. HEREFORD, *Phys. Rev.* 85, 675 (1952).
- (13) K.W. MC VOY, *Phys. Rev.* 106, 828 (1957).  
*Phys. Rev.* 110, 1484 (1958).
- (14) C. FRONSDAL, H. UBERALL, *Phys. Rev.* 111, 580 (1958).
- (15) S. GALSTER, H. SCHOPPER, *Phys. Rev. Letters* 1, 330 (1958).
- (16) Nuclear Data Sheets (National Research Council, Washington 25. D.C.).

M. Jean Oostens, présenté par M. A. Luyckx, fait oralement une remarque sur les coefficients de température du facteur de séparation électrolytique de l'eau et de l'eau lourde. Le texte en paraîtra ultérieurement dans les *Annales*.

## TABLE DES MATIÈRES DU TOME 73

Manuscrit reçu le 31 janvier 1959.

DEUXIÈME SECTION : SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES..	5	
Spectre infrarouge à grande dispersion et constantes moléculaires du CO <sub>2</sub> , par Ch. P. COURTOY .....	5	
Session du 16 avril 1959, à Bruxelles		
PREMIÈRE SECTION : SCIENCES MATHÉMATIQUES		
ET ASTRONOMIQUES .....	231	
Système demosien associatif de multigroupoïdes avec un scalaire non singulier, par A. SADE .....	231	
Some involution and incidence properties of the twisted cubic, by H.G. GREEN and L.E. PRIOR .....	235	
DEUXIÈME SECTION : SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES .....		245
Tables pour le calcul des doublets minces collés corrigés de l'aberration sphérique		
II. Valeurs de $\rho_1$ et de $\rho_3$ , par A. BIOT .....	245	
III. Valeurs de $\rho_1$ , $\rho_2$ , $\rho_3$ , $\varpi_2$ , $A+2$ , pour $n_3 = 1,70$ et $n_1 = 1,50$ ; 1,57; 1,58; 1,62; 1,66, par A. BIOT .....	253	
Contribution à l'étude, par spectrométrie infrarouge, de l'acide périodique H <sub>5</sub> IO <sub>6</sub> et du comportement vibratoire du groupement hydroxyle du type I-OH, par P. NATALIS .....	261	
Mesure de la polarisation circulaire des rayons gamma par détection de l'électron Compton; étude critique de l'expérience Clay-Hereford, par J. DEUTSCH .....	270	
Mesure de la masse du Rn <sup>222</sup> par spectrographie de masse, par S. SZÜCS et J.M. DELFOSSE .....	279	
Un sélecteur de temps de vol pour neutrons de 14 Mev, par G. DECON- NINCK et A. MARTEGANI .....	287	
Session du 29 octobre 1959, à Louvain .....		295
PREMIÈRE SECTION : SCIENCES MATHÉMATIQUES		
ET ASTRONOMIQUES .....	295	
Valeurs exceptionnelles des fonctions continues et uniformes. Fondements du théorème de Picard, par C. de LA VALLÉE POUSSIN .....	295	
Eutropie demosienne de multigroupoïdes et de quasigroupes, par A. SADE ..	302	
DEUXIÈME SECTION : SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES .....		310
On the statistical laws of linguistic distributions, by V. BELEVITCH .....	310	
L'énergie potentielle complémentaire dans les problèmes dynamiques. — Un principe de variation des accélérations, par B. FRAEYS de VEUBEKE.	327	

La lentille épaisse convergente. I. Représentation graphique et chromatisme des longueurs focales, par A. BIOT .....	345
II. Achromatisme du point image sur l'axe, par A. BIOT .....	354
L'épaisseur équivalente d'une lentille absorbante, par A. BIOT .....	363
Etude et première réalisation d'un stroboscope à déphasage variable, utilisant la modulation de lumière par les ultra-sons, par N. SEGARD, J. POULIQUEN et B. TRENTESAUX .....	373
Description d'un cryomètre à thermistance et cryométrie par fusion finissante, par P. HUYSKENS, P. CLAES et J.L. GAILLIEZ .....	383
L'influence de la température sur les photomultiplicateurs, par M. LONTIE-BAILLIEZ et A. MEESSEN .....	390
Table des solubilités des sels usuels à l'usage du chimiste praticien, par R. DELHEZ .....	403
Analyseur magnétique pour deutérons de 12 Mev, par A. GONZE .....	414
Polarimètre conique pour rayons gamma; mesures de corrélation « bêta-gamma polarisé circulairement » de $Au^{198}$ , par J.P. DEUTSCH et P. LIPNIK .....	420
Coefficients de température du facteur de séparation électrolytique de l'eau lourde, remarque de J. OOSTENS .....	431
Table des matières du tome 73 .....	432

#### AUTEURS

V. BELEVITCH, 310 — A. BIOT, 245, 253, 345, 354, 363 — P. CLAES, 383 — Ch. COURTOY, 5 — G. DECONNINCK, 287 — J. M. DELFOSSE, 279 — R. DELHEZ, 403 — J. DEUTSCH, 270, 420 — B. FRAEYS de VEUBEKE, 327 — J. L. GAILLIEZ, 383 — A. GONZE, 414 — H. G. GREEN, 235 — P. HUYSKENS, 383 — Ch. de LA VALLÉE POUSSIN, 295 — P. LIPNIK, 420 — M. LONTIE-BAILLIEZ, 390 — A. MARTEGANI, 287 — A. MEESSEN, 390 — P. NATALIS, 261 — J. OOSTENS, 431 — J. POULIQUEN, 373 — L. E. PRIOR, 235 — A. SADE, 231, 302 — N. SEGARD, 373 — S. SZÜCS, 279 — B. TRENTESAUX, 373.

#### DATES DE PUBLICATION

1<sup>er</sup> fasc. pp. 1 à 230 : 27 mars 1959  
 2<sup>me</sup> fasc. pp. 231 à 294 : 18 juin 1959  
 3<sup>me</sup> fasc. pp. 295 à 433 : 21 décembre 1959

(38.159) Etabliss. Ceuterick, s. c., 66, rue Vital Decoster, Louvain  
Dir. L. Pitsi, 25, rue Dagobert, Louvain (Belgique)

PRINTED IN BELGIUM

# Revue des Questions Scientifiques

Cette revue, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de cinq séries: la première série comprend 30 volumes (1877-1891); la deuxième, 20 volumes (1892-1901); la troisième, 30 volumes (1902-1921); la quatrième, 30 vol. (1922-1936). La livraison de janvier 1937 inaugura la cinquième série.

La revue fut interrompue par la guerre, après le deuxième fascicule, avril 1940, du tome 117 de la collection. Ce tome fut achevé par les fascicules de février et juillet 1946.

Depuis 1947, paraît chaque année un volume, en quatre fascicules d'environ 160 pages chacun, 20 janvier, 20 avril, 20 juillet, 20 octobre.

Depuis 1947 la Revue est aussi l'organe de l'UNION CATHOLIQUE DES SCIENTIFIQUES FRANÇAIS.

*Administration et Rédaction: 11, rue des Récollets, Louvain (Belgique)*

## PRIX D'ABONNEMENT

Belgique, Congo-Belge et Grand-Duché de Luxembourg	200 francs belges
abonnement de soutien . . . . .	500 francs belges
abonnement d'honneur . . . . .	1000 francs belges
France et Union française (s'adresser à la librairie Masson, 120, boulevard St. Germain, Paris 6 <sup>e</sup> ) . . . . .	2160 francs franç.
Autres pays (s'adresser au Secrétariat, à Louvain) . . . . .	280 francs belges

